

Les images dans les œuvres scientifiques de Port-Royal

Dominique DESCOTES

Centre d'Études sur les Réformes, l'Humanisme et l'Âge Classique
UMR 5037, Institut d'Histoire de la Pensée Classique

Les ouvrages scientifiques issus du milieu de Port-Royal ne sont pas nombreux, mais ils ont laissé leur marque dans l'histoire. Le *Traité du triangle arithmétique* de Pascal a ouvert les recherches sur le calcul des probabilités et, de l'accord général, ont fourni la première version vraiment achevée du raisonnement par induction mathématique. Ses *Lettres de A. Dettonville* sont, comme l'a écrit Claude Merker, le « chant du cygne des indivisibles¹ », dans lequel Leibniz a trouvé le *triangle caractéristique*, base du calcul intégral. Les écrits sur les sections coniques, inspirés à Pascal par Desargues, quoique presque entièrement perdus en dehors de l'*Essai pour les coniques* et de la *Generatio conisectionum*, annonçaient la géométrie projective de Poncelet. Les *Traités de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air* en tout cas ont connu un succès immédiat, puisqu'ils ont été développés par Mariotte. De son côté, Arnauld a produit des *Nouveaux éléments de géométrie* qui, sans avoir contribué autant que Pascal au progrès positif des mathématiques, ont eu une influence remarquable dans l'histoire de la pédagogie des mathématiques en France². Enfin, si l'*Euclides logisticus* de François de Nonancourt³ est demeuré longtemps presque inconnu, il a mérité l'intérêt d'Antoine Arnauld, et constitue un essai non méprisable de réflexion sur les fondements de la théorie des raisons. Ces ouvrages pèsent évidemment peu en volume, à côté de la production massive des mathématiciens jésuites, des Pères Grégoire de Saint-Vincent, André Tacquet, Antoine de Lalouvière, François d'Aiguillon ou Jean Charles de La Faille, ou même à côté des nombreux volumes composés par le minime Marin Mersenne. Mais chacun use de manière originale et parfois subtile des figures qui accompagnent les démonstrations.

On doit naturellement regretter des lacunes et des pertes considérables. La perte de nombreuses images, sans doute irrémédiable, réduit considérablement le corpus. C'est

¹ Claude Merker, *Le Chant du cygne des indivisibles, Le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, Besançon, Presses Universitaires Franc-Comtoises, 2001.

² Antoine Arnauld, *Nouveaux éléments de géométrie, contenant outre un ordre tout nouveau, et de nouvelles démonstrations, les propositions les plus communes, de nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, De nouvelles mesures de l'angle, dont on ne s'était point encore avisé ; Et de nouvelles manières de trouver et de démontrer la proportion des lignes*, à Paris, chez Claude Savreux, Libraire Juré, au pied de la Tour de Notre-Dame, à l'enseigne des trois Vertus, 1667 ; seconde édition Paris, Guillaume Desprez, 1683 ; troisième édition, La Haye, Van Duren, 1693. Texte réédité dans *Géométries de Port-Royal*, éd. D. Descotes, Paris, Champion, 2009.

³ François de Nonancourt, *Euclides logisticus, sive de ratione euclidea*, Louvain, chez André Bouvet, avec approbation de J. Pontanus, 1652. Texte réédité dans *Géométries de Port-Royal*, édition de D. Descotes, Paris, Champion, 2009. Sur l'auteur, voir L. Ceysens, « Le Sieur de Nonancourt, janséniste gantois », dans *Bulletin de l'institut historique belge de Rome*, 39 (1968) 455-480, *Jansenistica minora*, XI.

le cas par exemple, des figures que Pascal a composées pour illustrer ses travaux sur les coniques. La disparition de son grand traité latin sur les coniques est d'autant plus regrettable que les figures en étaient nombreuses et complexes. Le P. Mersenne écrit à Constantin Huygens que le jeune géomètre a résolu le « lieu de Pappus *ad 3 et 4 lineas* qu'on prétend ici n'avoir pas été résolu par M. Descartes en toute son étendue », et que son travail devait revêtir une très grande généralité, puisqu'une seule de ses propositions comprenait généralement « toutes les sections coniques et l'*Apollonius* dans une seule proposition, de laquelle il dérive tellement 400 corollaires que pas un ne dépend l'un de l'autre, mais tous, aussi bien le dernier que le premier, de ladite proposition ». On comprend aisément que les figures devaient refléter cette généralité : « il a fallu des lignes rouges, vertes, et noires pour distinguer la grande multitude des considérations⁴. » La perte de ces figures est d'autant plus regrettable que ce *Traité des coniques* n'a jamais été imprimé, de sorte qu'il y a des raisons de penser qu'elles étaient dessinées sur le manuscrit de la main de Pascal lui-même. Nous n'en avons aujourd'hui plus aucun vestige, hors quelques images copiées par Leibniz, fort difficiles à interpréter. C'est encore plus dommageable lorsque l'on considère que la *Generatio conisectionum*, seule pièce sauvée du naufrage, ouvrait le traité sur des constructions qui tiennent lieu de définition des coniques⁵. Pascal évite de commencer par présenter le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse (sans parler des cas triviaux du point, de l'angle et de la droite), pour montrer après coup comment on peut en unifier la théorie. Il suit au contraire la méthode initiée par Girard Desargues, en engendrant d'abord dans l'espace à trois dimensions la *surface conique*, qu'il coupe par un plan dont la situation peut être variable, pour faire apparaître par leurs intersections les diverses courbes : lorsque le plan ne passe pas par le sommet du cône, et n'est parallèle à aucune verticale, la section est une antobole, c'est-à-dire une ellipse ; si le plan ne passe pas par le sommet du cône et se trouve parallèle à une de ses verticales, la section est une parabole ; enfin si le plan ne passe pas par le sommet du cône, et se trouve parallèle à deux verticales, il engendre une antobole, c'est-à-dire une ellipse.

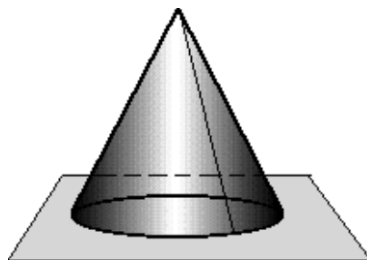


Figure 1

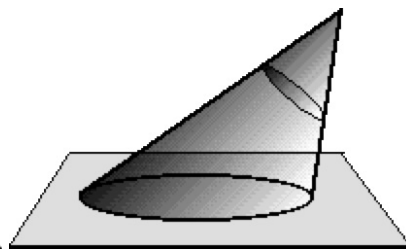


Figure 2

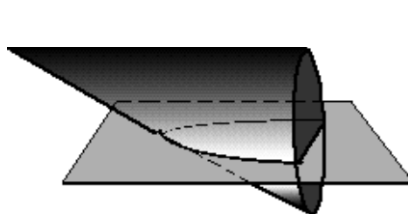


Figure 3

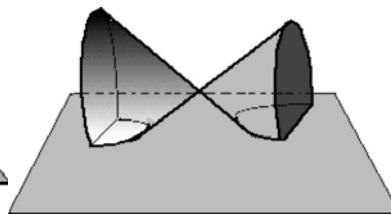


Figure 4

⁴⁴ Lettre de Mersenne à Théodore Haak du 18 novembre 1640, dans Pascal, *Œuvres complètes*, II, éd. J. Mesnard, Paris, Desclée de Brouwer, 1970, p. 239, et lettre de Mersenne à Constantin Huygens, du 17 mars 1648, dans Pascal, *Œuvres complètes*, p. 578. Cette édition sera désignée par le signe OC suivi du numéro du volume.

⁵ OC II, p. 1108 sq.

Très vite, Pascal adopte un langage projectif et pictural, indiquant qu'il faut imaginer que l'œil est au sommet du cône, que la base circulaire du cône doit être considérée comme un *objet*, et que le plan sur lequel est projetée l'*image* (*apparentia*) du cercle, autrement dit l'une des sections coniques, selon la situation relative de ces éléments, s'appelle le *tableau*. En d'autres termes, Pascal présente l'idée fondamentale de la géométrie de Desargues d'une manière plus intuitive et éclairante que Desargues lui-même. D'une certaine manière, on peut accorder que les images sont comprises dans le vocabulaire dont use Pascal, qui est manifestement emprunté à la peinture. Mais on ne peut que regretter que les figures qui ont peut-être illustré ce vestige de ses travaux géométriques soient perdues. Tout ce dont le lecteur dispose sur ce sujet, ce sont les trois figures qui ouvrent l'*Essai pour les coniques*, qui ne montrent rien de la structure projective dessinée dans la *Generatio conisectionum*.

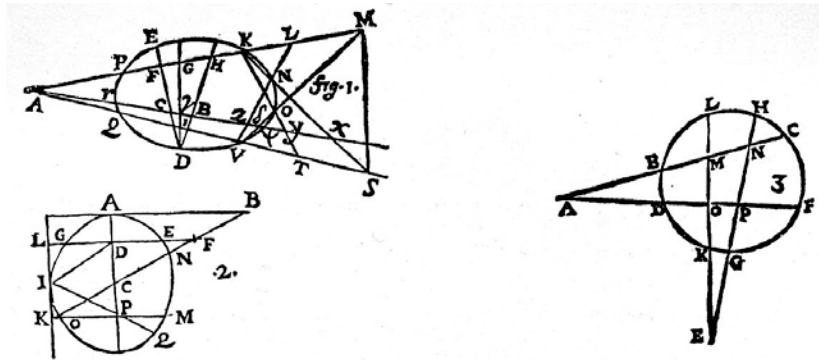


Figure 5

Par bonheur, les traités de mathématique et de physique qui ont été imprimés ont échappé à la destruction, et fournissent une matière très riche.

En apparence, les techniques de nos trois auteurs sont très différentes.

Le *Traité du triangle arithmétique* s'ouvre sur un unique tableau numérique, dont Jean Mesnard indique qu'il a été établi par Pascal lui-même ou sous sa direction⁶.

	Z	I	2	3	4	5	6	7	L	P	9	10
1		g	σ	π	λ	μ	ς	ζ	η	θ	ι	κ
2		φ	χ	θ	ρ	σ	τ	ν	ξ	ο	π	ρ
3		A	B	C	ω	ξ	21	28	36			
4		D	E	F	ρ	γ	36	84				
5		H	M	K	35	70	126					
6		P	Q	21	36	126						
7		V	7	28	84							
8		T	1	8	36							
9			1	9								
10				1								

Rangs parallèles

Triangle Arithmétique

Rangs perpendiculaires

Figure 6

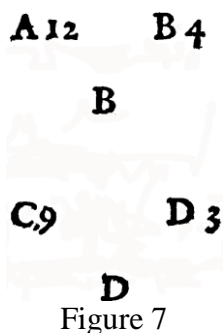
⁶ OC II, p. 1169.

En revanche, les *Lettres de A. Dettonville* sur la cycloïde comportent quatre planches dont les études de Kokiti Hara, Pierre Costabel et Jean Mesnard, ont éclairci l'histoire secrète, sur laquelle nous reviendrons plus bas⁷.

L'*Euclides logisticus* de François de Nonancourt est moins riche en figures. Comme le sujet de son *Euclides logisticus* est volontairement borné à la théorie fondamentale des proportions, il n'assortit son texte d'aucune illustration proprement graphique, mais seulement de tableaux sommaires propres à représenter les rapports en question, dénués de toute recherche et de toute originalité. Pour ne donner qu'un exemple, la Proposition I, qui s'énonce comme suit, « si la première grandeur se trouve à l'égard de la seconde, comme la troisième à l'égard de la quatrième, la seconde aussi se trouve à l'égard de la première comme la quatrième à l'égard de la troisième⁸ », autrement dit, « si A est à B comme C à D, B est à A, comme D est à C », soit

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{D}{C}$$

est illustrée par la représentation suivante :



Elle ne présente aucune originalité : on en trouverait de toutes semblables dans les *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* de Bachet de Méziriac et chez bien d'autres.

Les *Nouveaux éléments de géométrie* d'Arnauld sont plus riches en figures. Plus exactement, les figures en sont nombreuses, mais aussi très simples, sans art apparent et dépourvues d'ornement, comme en témoignent les exemples suivants. On ne trouve nulle part la débauche de belles images du traité d'André Tacquet sur les cylindres et les anneaux. Comme il convient à un ouvrage d'éléments qui ne s'élèvent que jusqu'à la mesure des aires des parallélogrammes, des triangles et autres polygones, Arnauld a d'abord veillé à mettre la présentation des figures en accord avec le texte qu'elles illustrent, en évitant d'encombrer le dessin d'aucun élément superflu. D'autre part, dans les éditions de 1667 et de 1683, les images sont réparties au fil du texte, de manière à bien soutenir le progrès de la lecture⁹.

⁷ Sur les figures de Dettonville, voir Kokiti Hara, *L'Œuvre mathématique de Pascal*, Osaka, 1981 ; Pierre Costabel, « Essai sur les secrets des *Traité de la roulette* », dans *L'Œuvre scientifique de Pascal*, Presses Universitaires de France, Paris, 1964, p. 169-206 ; OC IV, éd. J. Mesnard, p. 380 sq. ; Dominique Descotes, « Genèse des Corollaires 1 et 2 de la *Lettre à Carcavy* de Blaise Pascal », *Revue d'Histoire des Sciences*, 51/1, 1998, p. 127-138.

⁸ *Euclides logisticus*, p. 24. Cette proposition est donnée dans Euclide, *Éléments*, V, mais dans un porisme consécutif à la Proposition VII.

⁹ Contrairement à l'édition des *Œuvres* d'Arnauld dans lesquelles les figures sont toutes regroupées sur des planches à la fin du livre.

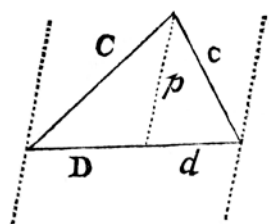


Figure 8

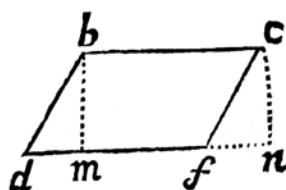


Figure 9

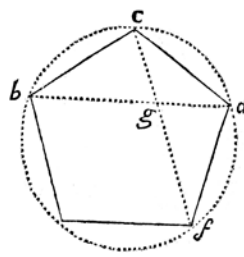


Figure 10

Mais leur répartition est intéressante. Les quatre premiers livres ne comptent que deux images, qui n'ont rien de géométrique : l'une d'elles consiste en une table des « nombres triangulaires, pyramidaux et plus que pyramidaux », qui n'est autre que le triangle arithmétique de Pascal, dont l'influence est évidente dans le texte qui l'accompagne : Arnauld avoue qu'il tient cette table numérique d'un « habile homme », mais que lui-même n'en connaît pas tous les secrets. Cependant, le dessein de l'auteur explique cette rareté de figures dans ses premiers livres. Arnauld prend au sérieux le titre de *Nouveaux éléments* : il n'a pas l'intention de reproduire les *Éléments* d'Euclide, comme la plupart des manuels de l'époque. S'inspirant des idées de Ramus et de Descartes, il reproche sévèrement au géomètre grec de renverser l'ordre naturel des mathématiques : Euclide ouvre en effet ses *Éléments* sur quatre livres de géométrie, pour venir aux grandeurs en général au livre V seulement, passer ensuite à l'arithmétique, et revenir enfin à la géométrie : l'ordre naturel voudrait au contraire, selon Arnauld, que l'on commence par les choses les plus simples et les plus générales, avant d'en venir aux plus composées qui en sont les conséquences particulières. La préface des *Nouveaux éléments*, due à la plume de Nicole, insiste bien le fait qu'Arnauld estime que la théorie abstraite des grandeurs en général doit précéder dans l'ordre de la connaissance les disciplines dont elle est le fondement. C'est pourquoi il entreprend de traiter « de la quantité ou grandeur en général, en tant que ce mot comprend l'étendue, le nombre, le temps, les degrés de vitesse, et généralement tout ce qui se peut augmenter en ajoutant ou multipliant, et diminuer en soustrayant ou divisant, etc. », avant de passer à la géométrie, qui est la science particulière de l'étendue et de l'espace. Son premier livre touche donc les opérations élémentaires sur des grandeurs quelconques, le deuxième traite des proportions, le troisième des raisons composées et le quatrième des grandeurs commensurables et incommensurables. Il n'aborde qu'après ces fondements et leurs conséquences arithmétiques, l'étude de l'étendue, des lignes droites et circulaires, des lignes parallèles, des arcs de cercle et des angles, jusqu'au livre XV qui traite des surfaces. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que les figures n'apparaissent que dans ce second mouvement. La répartition des images dans le livre illustre l'idée directrice de l'ouvrage : elle découle d'un principe qui vise à renouveler la pédagogie des mathématiques.

La même sobriété se retrouve dans la *Logique ou l'art de penser* et les autres ouvrages pédagogiques issus de Port-Royal. Les auteurs de la *Logique* auraient très bien pu illustrer le passage relatif aux *espaces infinis égaux au fini* par une image qui aurait montré au lecteur comment en construire un sans difficulté. Ils se contentent de donner une description verbale sans rien accorder à l'intuition visuelle¹⁰ : « Si l'on prend la moitié d'un carré, et la moitié de cette moitié, et ainsi à l'infini, et que l'on joigne toutes

¹⁰ Voir *La Logique ou l'art de penser*, IV, 1, éd. D. Descotes, Paris, Champion, 2011, p. 519. Voir Dominique Descotes, « Espaces infinis égaux au fini », dans *Le Grand et le Petit*, CRDP, Clermont-Ferrand, 1990, p. 41-67.

ces moitiés par leur plus longue ligne, on en fera un espace d'une figure irrégulière, et qui diminuera toujours à l'infini par un des bouts, mais qui sera égal à tout le carré. »

Pascal procède avec la même sobriété dans certains cas. On s'est souvent étonné que les procès-verbaux des huit *Expériences nouvelles touchant le vide*¹¹ qui font écho aux expériences que Pascal a publiquement présentées à Rouen ne sont illustrés par aucune illustration. Alexandre Koyré remarquait que le texte en aurait pourtant eu bien besoin, dans la mesure où certaines expériences étaient réalisées avec des dispositifs extraordinaires, élevés parfois jusqu'à quinze mètres au-dessus du sol, sans que rien n'explique par quelles machines on pouvait remplir d'eau ou de vin de si grands tubes et siphons de verre et les élever sans les briser¹². Il n'y a guère que le récit qu'en fait Roberval qui donne une idée concrète des montages inventés par Pascal, mais Roberval n'était pas sur place au moment où Pascal a procédé publiquement à ces spectaculaires démonstrations. Et quelques années plus tard, le *Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs*, qui rapporte l'expédition de Florin Périer sur le puy de Dôme pour prouver la pesanteur de la masse de l'air, ne comporte pas la moindre illustration¹³. Tout ce que l'on trouve dans les marges, c'est une mesure qui permet au lecteur de se faire une idée précise de la différence de hauteur de la colonne de mercure entre le pied et le sommet de la montagne.

Mais l'absence d'appui visuel répond au dessein de l'auteur. Dans les deux cas, Pascal ne prétend pas apporter un traité complet sur le vide et la pression de l'air : il entend seulement donner les faits fondamentaux et annoncer des ouvrages plus complets à venir. Sa technique de description des expériences ne tend pas à rapporter tous les détails, mais à montrer les points essentiels : l'apparition du vide dans les tubes, seringues et siphons dans certaines conditions précises. Le texte dit ce qu'il faut voir, et non tout ce qu'il y a à voir. Une illustration indiscreète nuirait à la compréhension au lieu de la servir.

Quant à l'expérience du puy de Dôme, Pascal juge sans doute que le récit de Florin Périer est assez pittoresque pour ne pas l'alourdir par des images superflues. Car le texte par lui-même a valeur d'illustration. Le *Récit de la grande expérience de l'équilibre des liqueurs* est construit sur des inclusions qui ont valeur de mise en scène. Il s'ouvre sur une adresse de l'auteur au lecteur, qui fait état de l'évolution de ses pensées sur le vide, et il s'achève sur un bref discours sur le progrès décisif apporté par l'expérience du puy de Dôme. Entre les deux, Pascal reproduit la correspondance, par laquelle en 1647 il a demandé à son beau-frère de procéder à l'*experimentum crucis*. Ensuite, il intègre la copie de la lettre du 22 septembre 1648, dans laquelle Périer fait le récit de l'expérience qu'il a réalisée deux jours plus tôt. Cette construction, qui annonce celle des *Provinciales*, donne littéralement à voir, dans l'impression même du texte, le déroulement des faits comme s'ils se passaient sous les yeux du lecteur. Le pittoresque récit de l'expédition, qui met en scène le groupe d'*aficionados* gravissant allègrement les pentes de la montagne par un temps d'hiver auvergnat, puis arrivé au sommet, se disputant le plaisir de faire et de refaire l'expérience du vide « en divers endroits [...], tantôt à couvert dans la petite chapelle [...], tantôt à découvert, tantôt à l'abri, tantôt au vent, tantôt en beau temps, tantôt pendant la pluie et les brouillards », puis plusieurs fois à La Font de l'Arbre, se suffisait amplement à lui-même, sans exiger d'image pour en

¹¹ OC II, p. 498 sq.

¹² « Pascal savant », dans *Blaise Pascal. L'homme et l'œuvre*, Paris, Éditions de Minuit, 1956, p. 259-295, et « Pascal savant », dans *Études d'histoire de la pensée scientifique*, Paris, NFR, Gallimard, 1966, p. 362-389.

¹³ OC II, p. 677 sq.

figer l'animation¹⁴. Des illustrations n'auraient fait qu'alourdir un ouvrage que Pascal voulait bref, léger et vivant.

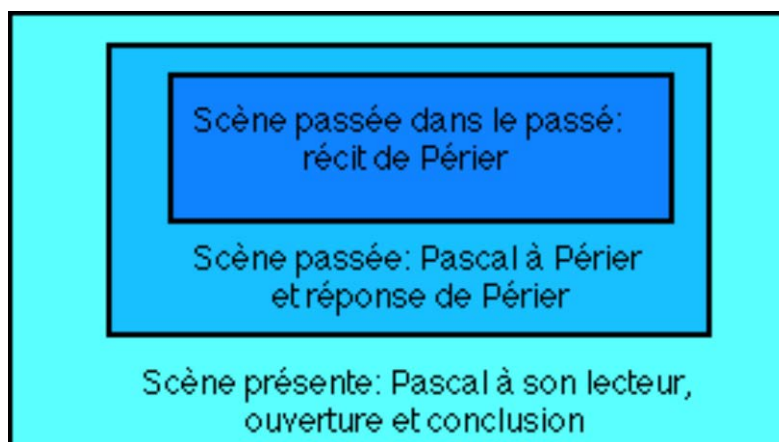


Figure 11

En revanche, la technique des *Traité de l'équilibre des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air* de 1654 et les *Lettres de A. Dettonville* de 1658-1659 sur la cycloïde est bien différente. Ces traités comportent des illustrations qui ne sont ni inutiles, ni insignifiantes. Leur beauté ne peut guère être que l'œuvre d'un véritable artiste. Elles ne relèvent pas toutes du même genre : les figures de physique tendent vers une représentation réaliste des instruments d'expérimentation, alors que les figures des traités de géométrie sont par nécessité plus abstraites. Mais les frontières sont moins nettes qu'on ne pourrait croire. À côté des figures de géométrie plane, les planches de Dettonville offrent des représentations de corps à trois dimensions, représentés avec un relief concret et un jeu d'ombres qui leur confèrent une réalité inhabituelle. La première figure de Dettonville, par exemple, si on l'envisage du point de vue géométrique, représente le solide que Pascal appelle un *onglet*. Il est évident aussi que l'on ne peut manquer d'y voir une sorte de palissade avec son ombre projetée sur le sol. Sur la troisième planche, Pascal présente un solide qu'il appelle un *escalier*, dont l'apparence concrète dissimule une somme de portions de surfaces suggérées par un pointillé discret.

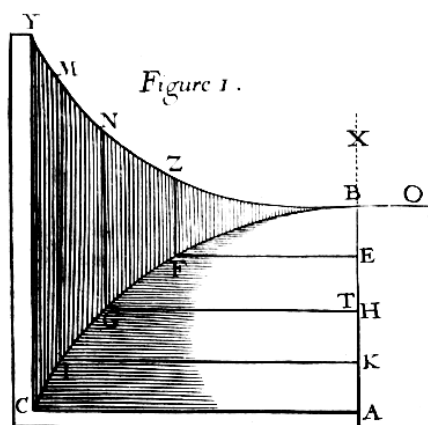


Figure 12

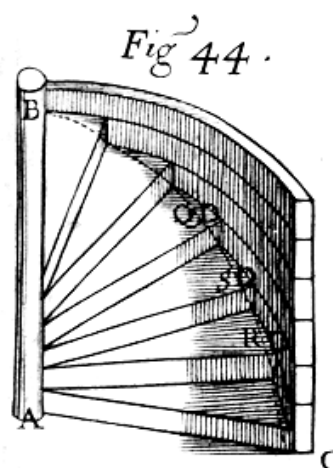


Figure 13

¹⁴ Les images par lesquelles certaines publications représentent l'expérimentation sur le puy de Dôme avec des personnages vêtus comme au XVIII^e siècle, rendent très mal l'ambiance de l'expédition conduite par Périer.

Certaines figures sont présentées comme si elles étaient portées par une tenture, qui les met à part des autres, comme le veut le texte, qui traite, non de la roulette, mais de la parabole.

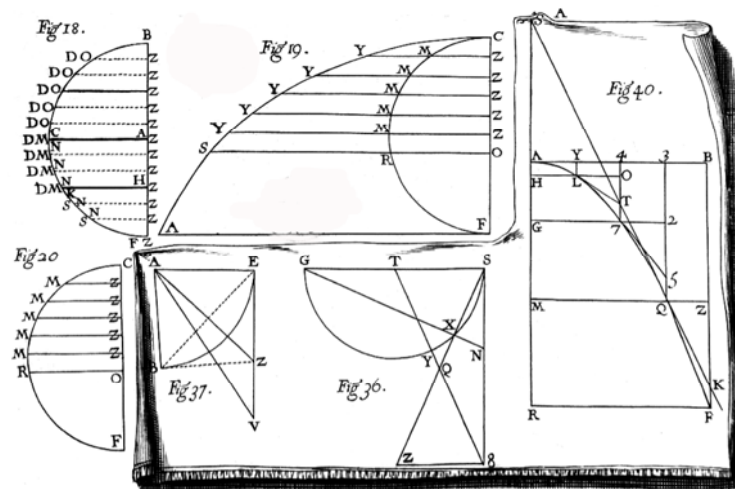


Figure 14

De leur côté, les planches des traités de physique, qui représentent des instruments expérimentaux, vases communicants, presse hydrauliques, tubes de formes diverses, de manière concrète et réaliste, ne sont tels qu'en apparence : dans la planche du *Traité de l'équilibre des liqueurs*, le personnage qui se trouve en bas à droite de la planche est visiblement pure invention, plongé qu'il est sous plusieurs mètres dans l'eau d'un lac, en train de vérifier que la pression hydrostatique engendre bien un gonflement de sa cuisse à l'endroit où sa main maintient le tube. Le texte ne fait d'ailleurs rien pour renforcer l'impression de réalité, puisque Pascal imagine aussi que le même personnage pourrait être envoyé à quelques mètres de profondeur dans un bain d'huile. Il s'agit bien d'une expérience de pensée, non d'une réalisation effective.

En revanche, il est visible que la construction de l'ensemble vise à moins à montrer aux yeux des instruments expérimentaux qu'à faire saisir à la raison les correspondances, les variations et les paradoxes de l'équilibre des liqueurs. La première ligne de figures montre de manière frappante que « les liqueurs pèsent suivant leur hauteur », et non selon la quantité de liquide : que le vaisseau soit uniforme et vertical, ou étroit et oblique, ou large et évasé, ou encore d'aspect conique ou très fin, la même force est nécessaire pour soutenir la liqueur qu'il contient, pourvu que la hauteur en soit la même.

La seconde ligne illustre l'analogie des différents cas d'équilibre hydrostatique dans des vases communicants : la figure VI représente l'équilibre d'un piston avec une colonne liquide, la seconde l'équilibre de deux pistons, et la troisième le cas trivial de l'équilibre de deux colonnes d'eau. Cependant, l'image ne se borne pas à la représentation de cette analogie : elle rend quasi évidente la « raison des effets » de l'équilibre des liqueurs : « il est visible qu'en la figure VI, l'eau d'un petit tuyau contrepèse un piston chargé de cent livres, parce que le vaisseau du fond est lui-même un vaisseau plein d'eau, ayant deux ouvertures, à l'une desquelles est le piston large, et à l'autre l'eau du tuyau, qui est proprement un piston pesant de lui-même, qui doit contrepeser l'autre, si leurs poids sont entre eux comme leurs ouvertures¹⁵. » Mais la mise en évidence de la raison de l'équilibre des liqueurs n'épuise pas la signification de

¹⁵ OC II, p. 1047.

cette rangée : car si tel avait été le cas, Pascal aurait sans doute dû placer la figure VII en première position, avant la figure VI et la figure VIII, afin d'obtenir une variation continue. Mais il place au contraire au milieu l'invention la plus originale, la « machine nouvelle de mécanique » que nous appelons la *presse hydraulique*, qui comporte deux ouvertures dotées chacune d'un piston, grâce à laquelle « un homme poussant le petit piston égalera la force de cent hommes qui pousseront celui qui est cent fois plus large ». La présentation ordonnée des effets, qui mène quasi géométriquement à leur raison, n'est pas exclusive d'une construction iconographique propre à rendre évidente au lecteur l'invention qui produit les effets les plus étonnants¹⁶.

Il ne serait pas très difficile de montrer que la partie inférieure de la planche présente une série de figures ordonnées par l'esprit de géométrie et le sens des correspondances visuelles. La figure IX répond à la précédente, puisqu'elle montre l'équilibre de deux colonnes liquides, à ceci près que cette fois, c'est un vaisseau plein de mercure qui est mis en équilibre avec une colonne d'eau¹⁷. La figure X montre que la pression de l'eau soutient le mercure même si l'ouverture du tube est placée vers le bas, précision que Pascal a fournie au début de son ouvrage, mais qui a tout de même quelque chose de surprenant à voir. Les expériences XI, XII et XIII montrent l'équilibre d'une colonne de liquide avec un corps solide d'une manière qui rappelle la figure VI. Les figures XIV et XVI, qui présentent un soufflet et un ballon immergés, tous deux compressibles, conduisent à l'image de l'homme immergé, dont nous avons dit le caractère surprenant.

¹⁶ *Traité de l'équilibre des liqueurs*, ch. II, OC II, p. 1044-1048.

¹⁷ De fait, la colonne de gauche, qui rejoint le niveau de l'eau, fait aussi intervenir la pression de l'air ; mais Pascal n'en tient pas encore compte à cet état de sa démonstration.

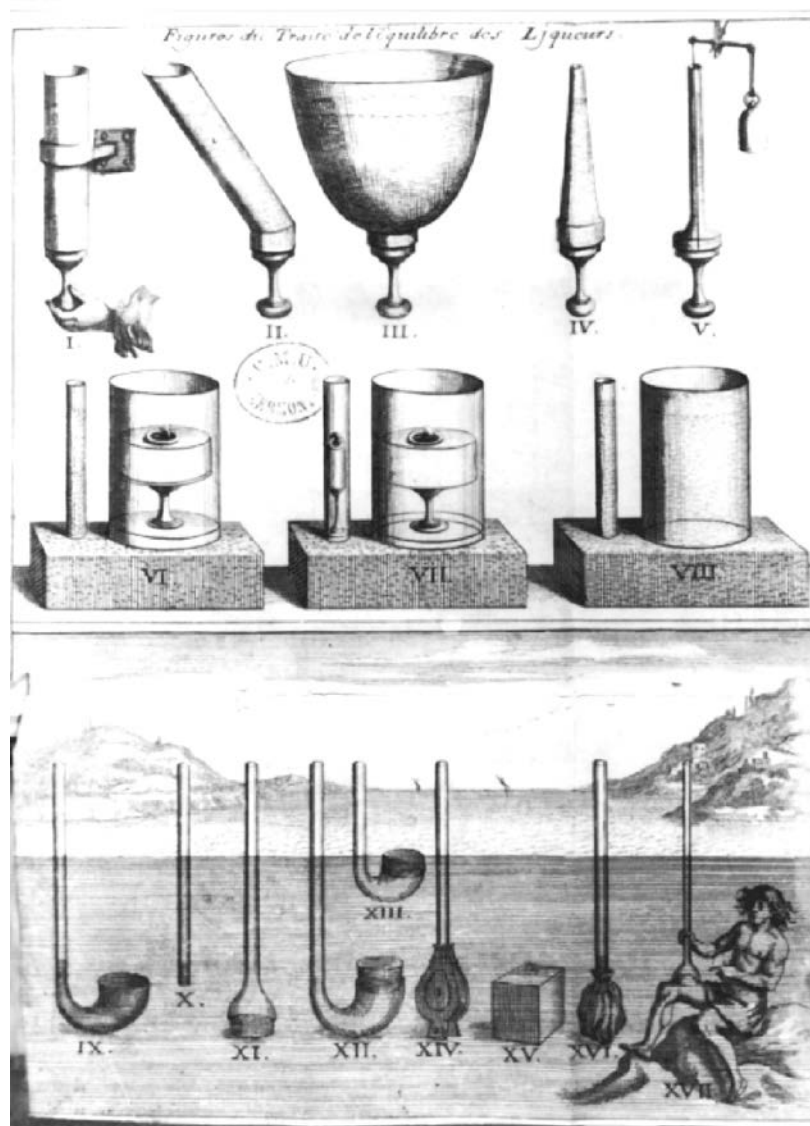


Figure 15

De la planche de *La Pesanteur de la masse de l'air*, on montre aisément la même chose. Comme on le sait, ce second traité est composé de manière à se tirer par analogie de *L'Équilibre des liqueurs* : les lois de l'hydrostatique s'appliquant à « toutes sortes de liqueurs », et l'air pesant en soi-même comme toutes les autres liqueurs, les lois de la pression atmosphérique se déduisent directement de celles qui ont été démontrées sur le mercure et l'eau.

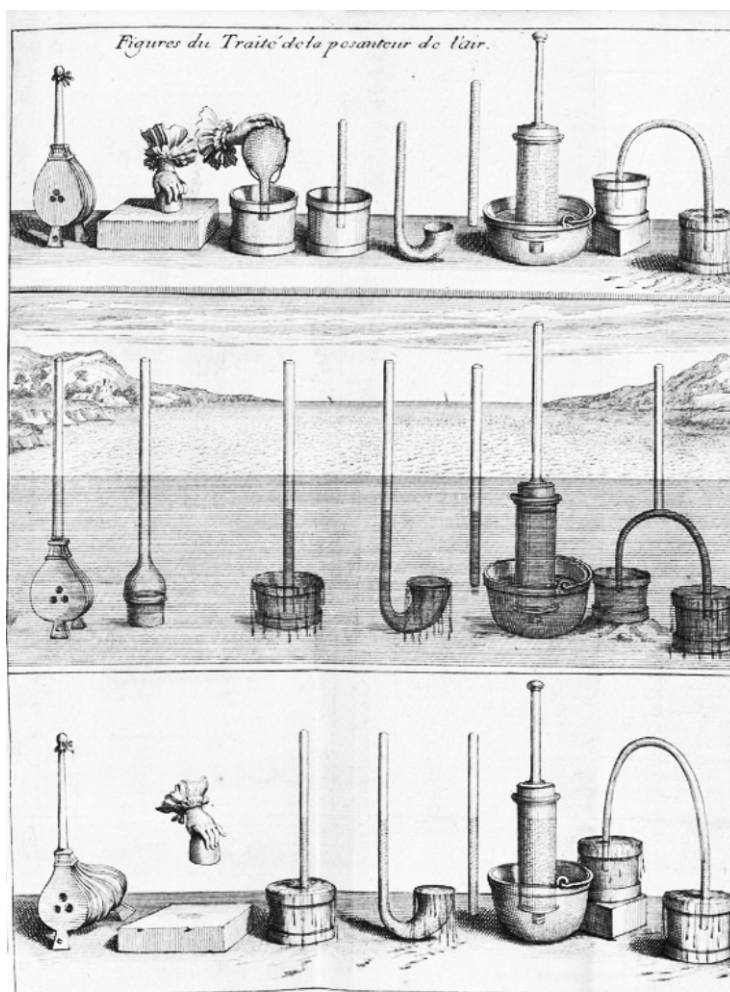


Figure 16

La planche est construite comme un tableau à double entrée, procédé auquel Pascal aime à recourir pour éclaircir les choses. On y voit une série d'instruments expérimentaux qui ont déjà été employés dans *L'Équilibre des liqueurs*, le soufflet, le vaisseau en forme de bouteille, les tubes rectiligne et recourbé, la seringue et le siphon. Horizontalement, ils sont présentés d'abord en eux-mêmes, puis sous l'eau et enfin à l'air libre : on reconnaît des expériences qui ont été représentées sur la planche de *L'Équilibre des liqueurs*, qui établit la liaison avec le traité fondamental de l'hydrostatique. Verticalement, on envisage les différents comportements d'un même dispositif dans les divers milieux : ce point de vue fait saisir la différence des effets sous l'eau, où il est par exemple difficile d'ouvrir un soufflet bouché, mais facile de l'ouvrir dans l'air. Et le lecteur saisit immédiatement que le mercure déborde des tubes et des vaisseaux, que le siphon y fonctionne aussi correctement que la seringue aussi bien dans l'eau qu'à l'air libre. Cette structure témoigne de la conciliation du souci pédagogique et du souci esthétique : c'est la rangée du milieu, celle qui renvoie à *L'Équilibre des liqueurs*, qui capte d'abord l'attention ; quant aux deux autres, le lecteur est d'abord tenté de n'en voir que la ressemblance ; mais la rangée centrale lui fait bientôt comprendre que la véritable parenté se tient entre la deuxième et la troisième rangées.

Il faut ajouter, pour être complet, que chacune de ces planches est la clé de l'autre : si d'un côté la première illustre le fondement théorique de la seconde, réciproquement la seconde éclaircit *a posteriori* certains détails de la première. La figure XV de *L'Équilibre des liqueurs* représente en effet un cube immergé, censé montrer que « l'eau

pousse en haut les corps qu'elle toucha par en dessous » et « en bas ceux qu'elle touche par-dessus¹⁸ » : le moins qu'on puisse dire, c'est qu'elle n'a rien de très suggestif, et paraît faire tache parmi ses voisines, toutes plus originales. Mais la planche du second traité résout la difficulté, en montrant, à l'aide d'une main dépourvue de corps¹⁹, qu'il ne s'agit là en réalité que d'un cas particulier d'un phénomène souvent évoqué dans les textes sur le vide : la difficulté que l'on trouve à soulever un pavé que la pesanteur d'une liqueur fait adhérer au sol.

Les traités de mathématiques ne diffèrent pas, de ce point de vue, des traités de physique. La technique qui consiste à charger les images d'une signification qui n'apparaît pas au premier regard, mais qui soutient le développement progressif du raisonnement y est aussi à l'œuvre.

C'est sous cet angle qu'il faut envisager la figure qui ouvre le *Traité du triangle arithmétique*. Les historiens lui ont trouvé une véritable horde de prédécesseurs : Jean Tranchant, Stifel, Tartaglia, Scheubel, Cardan, Maurolico, Chu Shih-chieh en Chine, al-Tûsi, Kamâl al-Din, Albert Girard, Stevin, Viète, Hérigone, tous été présentés comme des précurseurs de Pascal. À vrai dire, la seule source qui peut être considérée comme sérieuse est le P. Mersenne, qui propose dans son *Harmonie universelle* une *Table des variétés d'un chant de 12 notes prises en 36* à laquelle il ne manque que la colonne de gauche, entièrement composée d'unités, pour répondre parfaitement à la figure de Pascal²⁰. Mais les deux figures ne sont pas conçues de la même manière. La *Table* du P. Mersenne est d'abord, et surtout seulement un répertoire de résultats de calculs, comme il y en a beaucoup dans l'œuvre du minime : tout ce que l'on y trouve, c'est en ensemble de nombres de combinaisons, appliqué aux notes d'un morceau de musique. Mersenne a d'ailleurs dû faire plusieurs fois ses calculs, comme en témoignent les corrections qu'il y a apportées.

Table des variétés d'un chant de 12 notes prises en 36.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	
4	10	20	33	50	84	120	165	220	286	364	455	
5	15	35	70	116	210	330	495	715	1001	1365	1820	
6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	
7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	
8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	
9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970	
10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960	293930	
11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756	352716	646646	
12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960	352716	705432	1352078	
13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970	293930	646646	1352078	2704156	
14	105	560	2380	8568	27132	77520	203490	497420	1144066	2496144	5200300	
15	120	680	3060	11628	38760	116280	319770	817190	1961156	4457400	9657700	
16	136	816	3876	15504	54264	170544	490314	1307504	3268760	7726160	17383860	
17	153	969	4845	20349	74613	245157	735471	2042975	5311735	13057895	30421755	
18	171	1140	5985	26334	100947	346104	1081575	3124550	8496285	21474180	51895935	
19	190	1330	7315	33649	134596	480700	1561275	4686825	13123110	34597290	86493225	
20	210	1540	8855	43504	177100	657800	2220075	6906900	20030010	54627300	141120525	
21	231	1771	10626	53130	230230	888030	3108105	10025005	30045015	84672315	225792840	
22	253	2024	12650	65780	296010	1184840	4292145	14307150	44552165	129014480	354817320	
23	276	2300	14950	80730	376740	1560780	5852925	20160075	64512280	193336720	548354040	
24	300	2600	17550	98180	475010	2035800	7888715	28048800	91561040	286097760	834451800	
25	325	2925	20475	118755	593775	2629575	10518300	38567100	131128140	417225900	1251677700	

Figure 17

¹⁸ *L'Équilibre des liqueurs*, ch. V, OC II, p. 1053.

¹⁹ Cet étrange artifice iconographique n'a rien de bien original : on le retrouve dans les *Œuvres mathématiques* de Stevin et chez d'autres auteurs.

²⁰ Mersenne Marin, *L'Harmonie universelle*, livre second, *Des chants*, Proposition XVI, Corollaire II, p. 145.

On y vérifie que chaque nombre est la somme de son supérieur et de son voisin de gauche (par exemple $364 + 1001 = 1365$), et que chaque nombre est égal à la somme des nombres de la colonne de gauche, du haut jusqu'à son rang (par exemple : $1 + 5 + 21 + 56 = 84$). Le tableau paraît bien comparable à celui de Pascal, du fait que Mersenne présente les rangs de nombres horizontalement et les colonnes verticalement, contrairement à la présentation pyramidale choisie par Hérigone par exemple. Mais la table est trop abondante et confuse pour qu'il soit possible d'en dégager facilement les propriétés cachées. La confusion tient non seulement à la grandeur des nombres qui remplissent le tableau, mais aussi à sa structure. Le seul élément proprement graphique, savoir les traits qui soulignent les nombres en s'élevant à partir du 24 de la première colonne, jusqu'au 2 704 156 de la douzième, n'est pas reconnu comme ce que Pascal appellera la *base* d'un triangle arithmétique, alors que c'est l'un de ceux qui joueront un rôle essentiel dans le *Traité du triangle arithmétique*. Enfin, cette *Table* est un produit *fini* : il est inutile de préciser que le lecteur a tout intérêt à lire de très près les explications de l'auteur pour comprendre pourquoi, pour calculer le nombre de combinaisons C_{36}^{12} , il est besoin d'un tableau qui comporte 12 colonnes verticales et 25 rangs horizontaux ; il est mis en face d'un nombre considérable de résultats établis à grand effort par le P. Mersenne, mais il n'est guère associé à leur genèse : il peut admirer la ténacité qui a permis au minime d'effectuer à la plume les quelque 300 additions nécessaires pour remplir le tableau, mais c'est une raison pour lui de ne pas se lancer dans la même entreprise.

Tout au contraire, Pascal construit méthodiquement le triangle arithmétique et place ses éléments constitutifs sous les yeux du lecteur. Il effectue d'abord une construction géométrique qui, à partir du point Z engendre des *rangs* de *cellules* horizontaux ou *parallèles*, et des colonnes verticales ou *perpendiculaires*, puis des *bases* obliques qui déterminent autant de triangles. Des exposants propres sont assignés à ces rangs et à ces bases. Avant même que des nombres soient placés dans les cellules, Pascal prend soin de mettre sous les yeux du lecteur les conséquences qui découlent de cette construction : « les cellules d'une même base également distantes de ses extrémités », comme E et R par exemple, « sont dites réciproques », « parce que l'exposant du rang parallèle de l'une est le même que l'exposant du rang perpendiculaire de l'autre ». Il est aussi « plutôt compris que démontré » que « l'exposant du rang perpendiculaire de quelque cellule que ce soit, joint à l'exposant de son rang parallèle, surpasse de l'unité l'exposant de sa base » : par exemple la somme des exposants 3 et 2 de la cellule B, surpasse d'une unité l'exposant de sa base 4^{21} . Ces premières propriétés s'imposent par la seule inspection du triangle qui n'est pas encore, à ce stade, un triangle *arithmétique*.

Dans une deuxième étape seulement, Pascal entreprend de répartir des chiffres et des lettres dans les cellules. Les nombres sont engendrés de manières différentes dans les deux impressions du *Traité*. Dans la rédaction latine, les nombres sont engendrés, en commençant par un premier rang parallèle entièrement fait d'unités, en additionnant les nombres du rang précédent, de sorte que « chaque cellule est égale à la somme de toutes celles du rang parallèle précédent comprises depuis son rang perpendiculaire jusques au premier inclusivement ». Dans l'impression en français « le nombre de chaque cellule est égal à celui qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle », ce qui abrège et facilite le calcul²². Enfin à un certain nombre de cellules, Pascal affecte des lettres empruntées aux alphabets romain

²¹ OC II, p. 1288-1289.

²² *Ibid.*

et au grec, destinées à donner aux démonstrations une forme quasi symbolique, indépendante des nombres particuliers qui y figurent.

On a l'impression que ce début n'est pas éloigné de certains amusements arithmétiques qui évoquent les *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* de Bachet de Méziriac²³, qui visaient à répandre dans les milieux mondains les divertissements tels que les carrés magiques. Ce dehors attrayant a pour fonction d'éviter tout ce qui rendait le tableau du P. Mersenne rébarbatif et effrayant. Les dimensions restreintes du triangle arithmétique permettent au lecteur d'en saisir aisément la structure : la seule vision engendre une saisie intuitive des rapports qui relient les nombres les uns aux autres, et des *Conséquences* qui en découlent. Ainsi, lorsque Pascal fera remarquer que le triangle arithmétique que les rangs parallèles sont composés par les *ordres numériques*, on admet sans difficulté que si le premier rang est composé d'*unités*, le second répond aux nombres *naturels* (qui naissent de l'addition des unités) le troisième aux *triangulaires* (qui naissent de l'addition des naturels), le quatrième aux *pyramidaux* (qui naissent de l'addition des triangulaires), et ainsi de suite. Il ne sera pas nécessaire de procéder comme le font généralement les arithméticiens comme Maurolico, en démontrant séparément des propriétés particulières pour chaque ordre numérique : Pascal peut énoncer des lois très générales reliant tous les ordres numériques les uns aux autres, sans que le lecteur ait besoin d'autre chose que d'avoir sous les yeux la figure initiale. Il suffit par exemple de garder en mémoire ce qui a été indiqué sur les cellules *reciproques* pour saisir immédiatement que « deux nombres figurés sont égaux entre eux si la racine de l'un est le même nombre que l'exposant de l'ordre de l'autre²⁴ ».

L'appui qu'apporte la structure du triangle arithmétique est expressément affirmé par le passage où Pascal montre comment on peut varier les énonciations d'une même proposition et établir par là des théorèmes nouveaux. La Proposition 9 du *Traité des ordres numériques* montre qu'« un nombre de quelque ordre que ce soit, est à son coradical de l'ordre suivant comme l'exposant de l'ordre du moindre est à ce même exposant joint à leur racine commune ». Pascal tourne alors cette proposition d'une manière différente, mais équivalente : « un nombre, de quelque ordre que ce soit, étant multiplié par la racine précédente, égale l'exposant de son ordre multiplié par le nombre de l'ordre suivant procédant de cette racine ». Puis, par une conversion facile : « un nombre, de quelque ordre que ce soit, étant multiplié par la racine précédente et divisé par l'exposant de son ordre, donne pour quotient le nombre de l'ordre suivant qui procède de cette racine ». On pourrait croire que le lecteur se trouve dérouté par ces variations d'énonciations. En réalité, s'il a lu le *Triangle arithmétique*, il a remarqué la célèbre *Conséquence douzième*²⁵, qui montre que de « deux cellules contiguës », comme E et C dans la cinquième base, « la supérieure est à l'inférieure comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusques au haut de la base à la multitude de celles depuis l'inférieure jusques en bas inclusivement », c'est-à-dire comme 2 à 3. Il suffit d'une brève inspection sur la figure pour vérifier cette relation, qui est valable sur toute la surface du triangle. Les propositions énoncées plus haut n'en sont que des transformations arithmétiques élémentaires, que Pascal ne prend même pas la peine de détailler tant elles sont faciles.

²³ Claude Gaspard Bachet de Méziriac, *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres ; partie recueillie de divers auteurs et inventés de nouveau avec leur démonstration*, Lyon, chez Pierre Rigaud, 1612. Une seconde édition date de 1624.

²⁴ *Numeri figurati*, Prop. 4, OC II, p. 1200.

²⁵ OC II, p. 1327-1328, et 1294-1295. Cette proposition donne le modèle canonique de l'induction mathématique parfaite.

La coopération de la vue et de l'esprit qui caractérise ce traité prend une dimension encore plus impressionnante quand on associe les uns aux autres les petits traités successifs qui suivent le *Triangle arithmétique*, le *Traité des ordres numériques*, le *Combinations* et surtout l'*Usage du triangle arithmétique pour déterminer les partis*.

Pour les *ordres numériques*, aucune difficulté : ayant fait la table des nombres figurés naturels, triangulaires, pyramidaux, triangulo-triangulaires et ainsi de suite, on n'a qu'à constater que « trouvera cette table [est] pareille au triangle arithmétique » pour « connaître que tout ce qui a été dit des rangs et des cellules du triangle arithmétique convient exactement aux ordres des nombres, et que les mêmes égalités et les mêmes proportions qui ont été remarquées aux uns se trouveront aussi aux autres » : « il ne faudra que changer les énonciations, en substituant les termes qui conviennent aux ordres numériques comme ceux de racine et d'ordre, à ceux qui convenaient au triangle arithmétique, comme de rang parallèle et perpendiculaire²⁶. » On peut avoir l'impression que la transposition est insignifiante. Pascal veille à montrer qu'il n'en est rien, et que la coopération entre la vue et l'entendement prend des formes complexes, par exemple dans la Proposition 7 des *Ordres numériques* : « Un nombre, de quelque ordre que ce soit, est au prochainement plus grand dans le même ordre comme la racine du moindre est à cette même racine jointe à l'exposant de l'ordre, moins l'unité ». Pascal indique l'équivalence de cet énoncé avec la Conséquence 14 du *Triangle arithmétique*, « chaque cellule est à celle qui la précède dans son rang parallèle comme l'exposant de la base de cette précédente à l'exposant de son rang perpendiculaire ». Mais il remarque immédiatement que la relation n'est pas évidente « parce qu'on ne voit point de rapport de la base des triangles avec les ordres des nombres », puisqu'il n'existe pas de *bases* dans les nombres. Il faut alors compléter la connaissance intuitive que l'on a du triangle arithmétique avec les conséquences de sa structure géométrique : à l'exposant de la base, il faut substituer « l'exposant du rang parallèle, plus l'exposant du rang perpendiculaire moins l'unité » pour produire le même nombre, « avec cet avantage qu'on connaît le rapport qu'il y a de ces exposants avec les ordres numériques : car on sait qu'en ce nouveau langage, il faut dire : l'exposant de l'ordre, plus la racine, moins l'unité²⁷ ». Un raisonnement facile permet ainsi de remonter d'une proposition purement numérique à l'intuition du triangle arithmétique qui la fonde.

Le rapport des combinaisons avec le triangle arithmétique est moins visible, car la correspondance n'est pas immédiate : pour la démontrer, il faut quatre lemmes préalables. Pascal se forge un vocabulaire et une rhétorique personnels par lesquels il réduit les combinaisons à des expressions purement arithmétiques. « Je parlerai », écrit-il, « en ces termes :

1 dans 4 se combine 4 fois.

2 dans 4 se combine 6 fois.

3 dans 4 se combine 4 fois.

4 dans 4 se combine 1 fois.

Ou ainsi :

La multitude des combinaisons de 1 dans 4 est 4.

La multitude des combinaisons de 2 dans 4 est 6.

La multitude des combinaisons de 3 dans 4 est 4.

La multitude des combinaisons de 4 dans 4 est 1²⁸ ».

La ressemblance de ces expressions avec les comptines du calcul élémentaire ne doit pas tromper. Si Pascal évite la manière dont Mersenne et Frenicle combinent toujours

²⁶ OC II, p. 1301-1302.

²⁷ OC II, p. 1326-1327.

²⁸ OC II, p. 1303.

des fruits, des fleurs, des soldats ou des notes de musique, ce n'est pas seulement par un goût janséniste de l'austérité : c'est parce que ces expressions facilitent l'application du triangle arithmétique. Le lecteur qui a bien assimilé la construction des bases reconnaît immédiatement, dans la série de nombres 1, 4, 6, 4, la cinquième base du triangle arithmétique, amputée d'une unité. Il n'en comprendra peut-être la signification que lorsqu'il parviendra aux Propositions 1 et 2 : « en tout triangle arithmétique, la somme des cellules d'un rang parallèle quelconque égale la multitude des combinaisons du rang dans l'exposant du triangle », et « le nombre de quelque cellule que ce soit égale la multitude des combinaisons d'un nombre moindre de l'unité que l'exposant de son rang parallèle dans un nombre moindre que l'unité que l'exposant de sa base²⁹ ». Mais le traité des combinaisons établit sans difficulté des propriétés diverses qui renvoient aux *Conséquences* du *Triangle arithmétique* et sont quasi lisibles sur la figure. Par exemple, la proposition « deux nombres quelconques se combinent également dans le nombre formé par l'addition des deux » est référé sans explication à la propriété évidente « les cellules réciproques sont pareilles³⁰ ». Alors que, dans les ordres numériques, l'esprit va du triangle arithmétique aux nombres figurés, il procède ici à partir des combinaisons pour chercher dans le triangle arithmétique l'intuition de leurs propriétés. La part du raisonnement est plus importante que pour les ordres numériques, mais une fois la correspondance établie, l'esprit se trouve comme conduit à voir sur le triangle arithmétique des propriétés combinatoires qui, sans lui, seraient d'une abstraction pénible.

Avec les partis, la relation de l'image avec la théorie est plus complexe encore. Cette fois, Pascal est contraint de proposer toute une théorie des partis, avec deux principes, deux corollaires, et sept cas particuliers, avant de pouvoir établir le lien entre le triangle arithmétique et la méthode pour faire les partis entre deux joueurs. Mais la conclusion à laquelle il aboutit est en revanche particulièrement facile à saisir : « toutes les bases du triangle arithmétique » ont la propriété de contenir les partis que l'on doit faire entre deux joueurs, en comptant les cellules selon les parties qui manquent à chacun. Cette fois, le mouvement est encore différent : il faut partir de la théorie des partis, telle que Pascal l'a établie en concurrence avec Fermat, et c'est lorsque l'on cherche un résultat correspondant à une situation précise qu'il faut remonter à la figure triangle arithmétique pour trouver la portion de l'enjeu qui revient à chacun.

La même démonstration pour le *Potestatum numericarum summa* conduirait à des calculs assez complexes. Mais elle serait intéressante, dans la mesure où c'est *avant* de découvrir le triangle arithmétique que Pascal l'a établie. À telle enseigne qu'il lui a fallu, une fois le triangle découvert, ajouter à son traité un bref *Usage du triangle arithmétique pour trouver les puissances des binômes et apotomes*, qui lui permet d'établir la liaison avec le reste de l'ouvrage.

Le triangle arithmétique n'est pas la seule figure qu'une conception savante rend susceptible de conséquences fécondes. Presque toutes les figures de Pascal demandent à être examinées de très près si l'on veut leur arracher leurs secrets.

C'est le cas par exemple du *solide formé par le moyen d'une spirale autour d'un cône* de la *Lettre à Sluse*, qui est engendré par le mouvement d'une droite élevée verticalement, qui se rapproche du centre d'un cercle et se trouve en même temps entraînée par un mouvement qui suit une ligne spirale ; à mesure que la verticale se déplace, le point b situé au départ sur la base est supposé monter uniformément vers le point g. Il est difficile d'imaginer clairement le corps ainsi engendré, et encore plus de comprendre comment Pascal pense parvenir à en déterminer les proportions.

²⁹ OC II, p. 1305-1307.

³⁰ OC II, p. 1243.

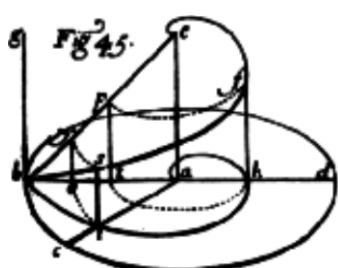


Figure 18

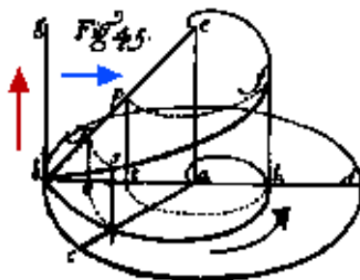


Figure 19

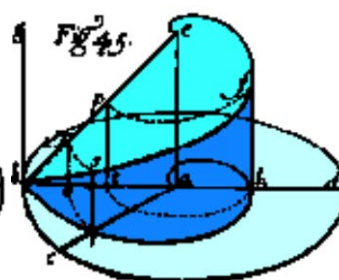


Figure 20

Pourtant il trouve le moyen d'associer ce solide aux *lignes en perle* de Sluse, qui n'ont à première vue aucun rapport avec lui.

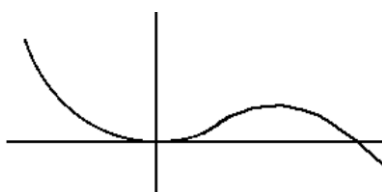


Figure 21

Plus étrange encore est la célèbre Figure 1 des *Lettres de A. Dettonville*, tant elle est instable. À première vue, c'est une illustration dont le caractère concret semble s'imposer.

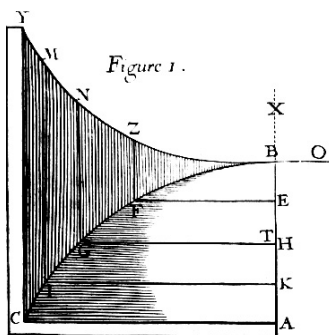


Figure 22

En réalité, elle ne peut être vraiment envisagée comme une représentation en perspective réaliste d'une palissade. Car ce que l'on prend d'abord pour la section d'un mur ne peut être vu comme tel, puisque son épaisseur se prolonge horizontalement, comme si elle passait sous la surface du sol BAC, un peu comme ce serait le cas dans un modèle de bois. Mais elle ne saurait non plus passer pour une maquette, car le texte indique expressément que les parallèles AC, KI, HG et EF doivent être bien considérées comme équidistantes, telles qu'elles sont tracées sur le dessin ; or si l'on avait affaire à une représentation perspective, ces lignes devraient paraître se rapprocher à mesure que la distance croît vers B. On peut essayer de concevoir triligne BAS, qui semble être le sol, comme une figure plane ; mais alors l'œil est contraint de ne pas voir le relief de la partie verticale. Le lecteur doit donc choisir entre deux perceptions incompatibles : voir dans le triligne ABC une somme plane d'*ordonnées*, c'est-à-dire de portions ACIK, KIGH, HGFE, ou voir une somme de *sinus* qui forment la palissade de gauche avec son

ombre portée ; mais il ne peut faire coexister ces deux perceptions dans une synthèse unique. Chacun des aspects de cette même figure peut en revanche servir en des endroits différents des *Lettres de A. Dettonville* : tantôt elle illustre par le triligne BAC les démonstrations qui portent sur les surfaces planes composées de portions nées des divisions K, H, E de la hauteur AB, tantôt c'est la « palissade » BCY qui sert à concrétiser les passages qui traitent des surfaces courbes. Le lecteur s'accoutume à une gymnastique visuelle indispensable, puisque le *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets* vise essentiellement à montrer comment la connaissance des surfaces planes conduit à celle des surfaces courbes³¹.

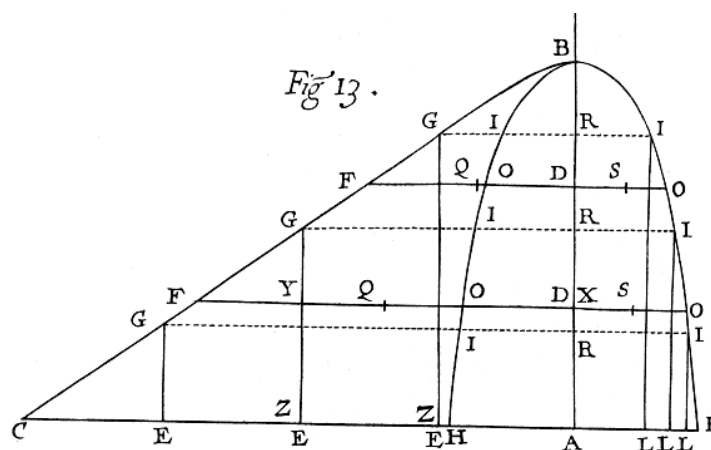
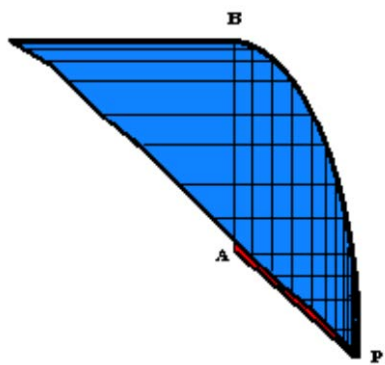


Figure 23

Dans ce *Traité* en effet, Pascal s'appuie sur une figure qui, par une adroite suite de transitions, permet de lier les deux types de surfaces. Lorsque l'on parle d'une *somme* de lignes dans le langage des indivisibles pascalien, on entend toujours que les lignes, droites ou courbes, sont *multipliées* par des portions toujours égales entre elles, ce qui permet à ces lignes accolées d'engendrer une surface. Selon ce style, les *ordonnées* à la base d'un triligne BAC sont les perpendiculaires EG à la base AC séparées par des distances EE toutes égales entre elles : ce ne sont pas à proprement parler des lignes, mais des surfaces dont la hauteur est une ordonnée EG, et la base une portion EE. Lorsque l'on prend la *somme* de ces ordonnées, on suppose que les portions EE deviennent très petites, de sorte que les $(EG \cdot EE)$ engendrent une surface plane dont l'aire est identique à celle du triligne BAC. De manière analogue, Pascal appelle *sinus* d'un triligne BAP les perpendiculaires IL à la base AP menées à partir des divisions I de la courbe BP, et supposées multipliées chacune par des portions égales II de la courbe BP : si on les redresse perpendiculairement au plan BAP, ces sinus engendrent une surface courbe dressée sur la courbe BP. Enfin on peut aussi prendre la somme des arcs BO de la même courbe BP : il suffit d'affecter à chaque arc BO une petite largeur égale à une portion DD de l'axe BA, d'où naît une surface. Si l'on superpose ces arcs, on obtient une surface courbe, dont Pascal se propose de montrer qu'elle est identique à celle que forme la *somme des sinus*.

³¹ Les figures de Dettonville se trouvent dans *OC IV*, p. 559-565.



Somme de sinus
Figure 24

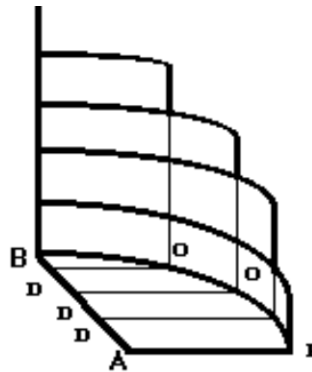
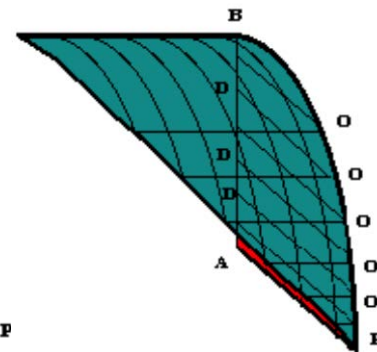


Figure 25



Somme d'arcs de courbe
Figure 26

La démonstration procède comme suit, en passant d'un côté à l'autre de la figure, du triligne BAP au triligne BAC, aller et retour.

Pascal part du triligne BAP. Il divise d'une part l'axe BA aux points D en portions toutes égales DD, et d'autre part la courbe BP aux points I en parties égales II, telles que l'on ait toujours :

$$\text{Arcs II} = \text{Segments DD}$$

Des points I de la courbe sont abaissés les *sinus* IL, entendus multipliés chacun par une portion d'arc II. La somme de ces sinus engendre une première surface courbe.

Des points D de l'axe BA sont tirées les ordonnées DO, qui déterminent sur la courbe BP des arcs BO. Chaque arc DO est supposé multiplié par une portion DD de l'axe, ce qui en fait une surface. La somme des arcs (BO . DD) engendre une seconde surface courbe.

L'objet de la démonstration est de montrer que la surface courbe engendrée par la somme des arcs BO est égale à celle qu'engendre la somme des sinus IL, ce qui n'a *a priori* rien d'évident.

La suite de la construction fait apparaître progressivement les éléments géométriques nécessaires à la démonstration.

Pascal prolonge chaque ordonnée DO du triligne BAP du côté de C par une droite DF, de longueur égale à l'arc BO correspondant ; en particulier, la base AC est égale à la courbe BP. Les points F engendrent une ligne courbe BFFC qui termine un triligne BAC, situé à gauche de BAP.

Les DF, étant nées des points équidistants D, sont des ordonnées à l'axe BA, et leur somme est égale à la surface du triligne BAC.

Dans un second temps, Pascal tire à partir des points I de la courbe BP des parallèles IR à la base PAC, qui prolongées à gauche de l'axe BA, vont couper la courbe BC aux points G. Comme les points I divisent la courbe en parties égales, les IR doivent être considérées comme les sinus sur l'axe BA³².

À partir de l'intersection G des IRG avec la courbe BC, on abaisse les perpendiculaires GE à la base AC. Il suffit de regarder la figure pour voir que chaque EG est égale au sinus IL sur la base AP du triligne BAP, et qu'elle le représente sur le triligne BAC.

Mais comme par la construction du triligne BAP, les parties GR qui prolongent les RI sont chacune égale à l'arc BI correspondant de la courbe BP. Or les portions II de l'arc BP étant toutes égales entre elles, les arcs BI croissent régulièrement comme les nombres naturels, ainsi que les segments GR qui leur sont égaux, si bien que les EG

³² Les sinus IL sur la base AP et les sinus IR sur l'axe BA naissent évidemment des mêmes points I de la courbe BP du triligne BAP.

sont toutes également distantes les unes des autres. Et par conséquent les EG en question sont des *ordonnées* (EG . EE) sur la base AC du triligne BAC, dont la somme est égale à la surface plane du triligne BAC.

Par conséquent, puisque les sommes $\sum (DF . DD)$ et $\sum (EG . EE)$ représentent l'une et l'autre la surface plane du triligne BAC, elles sont égales.

Mais dans cette somme d'ordonnées (EG . EE), chaque EG est égale à un sinus IL, et les portions égales EE sont toutes égales aux portions II des sinus. Il en résulte que la surface plane $\sum (EG . EE)$, autrement dit le triligne BAC est égale à la surface courbe formée par les sinus (IL . II) dressés perpendiculairement au triligne BAP.

Cette préparation laborieuse exige de la part du lecteur une attention soutenue. En revanche, elle aboutit à une démonstration fulgurante, qui passe du triligne BAP au triligne BAC, puis revient sur le triligne BAP :

$$\sum (BO . DD) = \sum (DF . DD) = BAC = \sum (EG . EE) = \sum (IL . II)$$

Autrement dit, la somme des arcs BO est égale à la somme des ordonnées DF, qui est égale à la surface du triligne BAC, qui est égale à la somme des ordonnées EG, qui est égale à celle des IL. Donc la somme des arcs (BO . DD) est égale à la somme des sinus (IL . II).

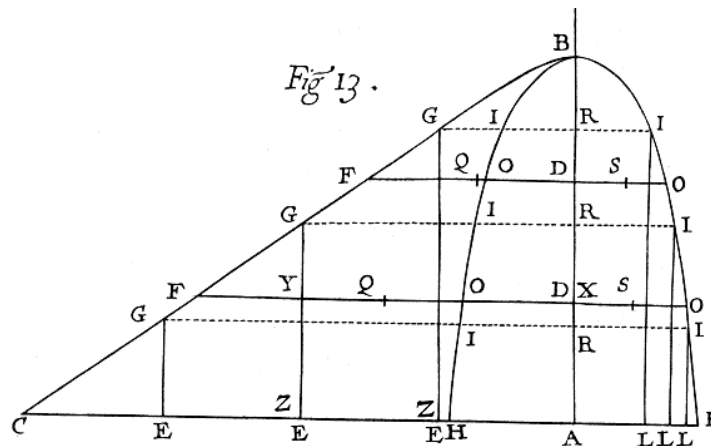


Figure 27

L'indispensable soutien de la figure permet au lecteur d'effectuer quasi immédiatement le transfert des sommes de lignes d'un triligne à l'autre, d'une manière qui rend la proposition pratiquement intuitive, alors qu'elle est loin d'aller de soi. Ce mouvement d'aller et retour parfaitement intuitif, peut du reste sans difficulté être transcrit dans le langage du calcul intégral qu'inventera Leibniz :

$$\sum (BO . DD) = \sum (IL . II) \text{ c'est-à-dire } \int_0^b s \, dy = \int_0^s y \, ds$$

Dans ce cas, la figure porte la démonstration. Mais bientôt, elle va se trouver dépassée par elle : le raisonnement géométrique amène progressivement l'intuition visuelle au-delà des limites dans lesquelles elle est naturellement bornée.

Les figures des *Lettres de A. Dettonville*, peuvent en effet être définies comme des *modèles*, dans la mesure où une seule et même figure en contient virtuellement une pluralité.

La figure 11 du *Traité des trilignes*, en fournit un exemple frappant. Pascal y envisage un triligne BAC, assorti d'une figure adjointe BAK ou ABH.

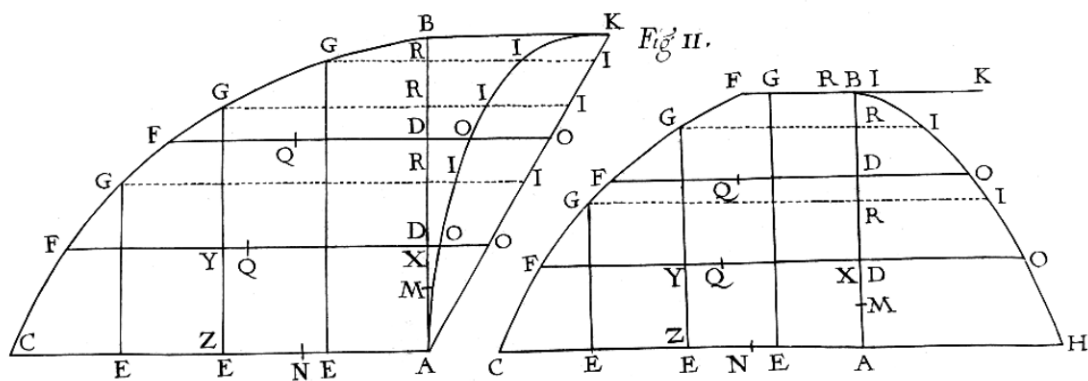


Figure 28

Il faut imaginer que l'on redresse BAK ou BAH perpendiculairement à ABC, et que l'on forme le solide déterminé par les intersections des perpendiculaires aux courbes de ces deux trilineaux. Selon la forme de la *figure adjointe*, le solide engendré prendra des formes différentes. La « multiplication » du trilineal ABC par le trilineal ABH engendre le solide ci-dessous, dont Pascal montre qu'il peut être composé aussi bien par la somme des rectangles (FD . DO) que par les portions élevées sur les ordonnées EG et identiques aux portions HARI du trilineal ABH³³.

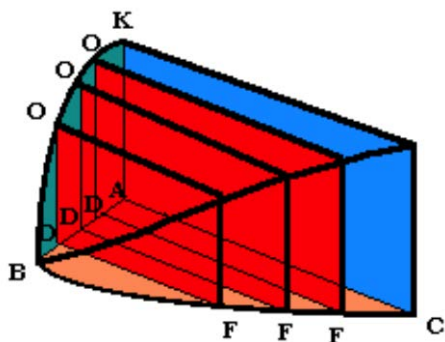


Figure 29

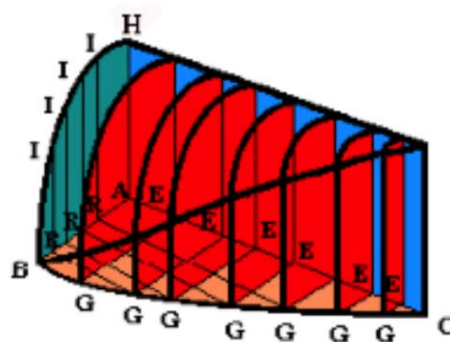


Figure 30

De sorte que l'on pourra conclure à l'égalité des deux sommes :

$$\sum (FD \cdot DO \cdot DD) = \sum (ARI \cdot EE)$$

Mais comme n'interdit de varier la forme du trilineal *adjoint* que l'on élève perpendiculairement à ABC, la même relation vaudra pour des solides très différents les uns des autres. Par exemple, si l'on élève perpendiculairement à ABC le triangle rectangle ABK, on engendre un autre solide, que Pascal appelle un *onglet*. Et si c'est le trilineal parabolique BAIK que l'on redresse, on obtient encore un solide d'aspect différent.

³³ Cette manière de considérer un solide comme une somme de plans parallèles est parfois appelée *double balayage* de ce solide. Mais dans le cas de Pascal, la formule convient mal : le mot *balayage* suppose que les plans se déplacent parallèlement à eux-mêmes. Chez Pascal, ils sont bien considérés comme juxtaposés, sans qu'intervienne aucun mouvement.

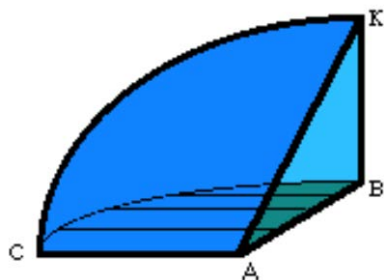


Figure 31

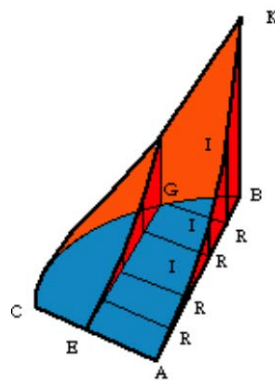


Figure 32

Grâce à quoi le lecteur apprend à voir dans le modèle initial une multitude de solides virtuels, auxquels il fera l'application selon les problèmes qu'il veut résoudre.

Mais l'aspect visuel de ces constructions subit le retentissement du vocabulaire arithmétique que Pascal emploie. Imaginons par exemple que l'onglet BACK ci-dessus soit complété par son symétrique par rapport au triligne BAC. On crée ainsi un *double onglet*, que l'on peut considérer comme la somme des triangles rectangles isocèles marqués en bleu sur la figure ci-dessous, chacun multiplié par une petite portion EE ³⁴.

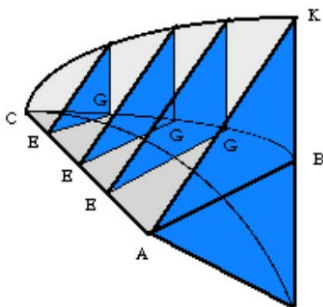


Figure 33

Or la surface d'un pareil triangle est égale au carré de sa hauteur EG , de sorte que le solide peut être considéré comme la somme des carrés EG , soit $\sum (EG^2 \cdot EE)$, qui a trois dimensions. Mais Pascal poursuit dans l'échelle des puissances sans s'arrêter aux limites des dimensions naturelles : il parle bientôt de la somme de cubes d'ordonnées, qui ont quatre dimensions, puis de sommes de carrés-carrés, qui en ont cinq, et se propose d'aller éventuellement plus loin. Encore s'agit-il là de carrés, de cubes et de carrés-carrés de lignes droites ; mais Pascal n'hésitera pas à traiter en mêmes termes de sommes d'arcs, de carrés, de cubes et de carrés-carrés d'arcs. De telles constructions cessent d'être soumises aux limites de la géométrie naturelle. En d'autres termes, la figure se retourne pour ainsi dire contre elle-même : ses éléments ne fournissent plus qu'un matériel géométrique élémentaire, qui ne sert au lecteur que de point de départ visuel, pour parvenir à un degré de réflexion où l'imagination devient aveugle : son caractère figuratif ne sert plus que d'adjuvant provisoire. En revanche, les raisonnements effectués sur les cas les plus simples permettent de concevoir par extension analogique la manière dont les éléments sommés doivent être pris. La figure ne représente plus les objets : elle sert de modèle pour effectuer des calculs sur des corps difficilement concevables, comportant un nombre virtuellement infini de

³⁴ *Traité des Trilignes*, Proposition II, OC IV, p. 444-445.

dimensions, sans chercher à les réduire aux objets visibles de la géométrie élémentaire³⁵.

Dans un autre genre d'usage, il arrive aussi que certaines figures viennent à représenter des réalités qui n'ont aucun caractère spatial, et sont purement intensives.

C'est dans ce but que Pascal a introduit dans les *Lettres de A. Dettonville* ce qu'il appelle les *sommes simples, triangulaires* et *pyramidales*. Ces notions, qui lui sont purement personnelles, sont définies de manière d'abord abstraite et générale, grâce à des figures d'une extrême simplicité. La *somme simple* de quatre grandeurs quelconques A, B, C, D est

$$A + B + C + D$$

La *somme triangulaire* de ces mêmes grandeurs consiste à les prendre chacune un nombre de fois égal à leur rang. Par exemple, la somme triangulaire de ces termes à partir de A est représentée par la figure suivante.

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ & B & C & D \\ & & C & D \\ & & & D \end{array}$$

Figure 34

Elle est égale à $1A + 2B + 3C + 4D$.

Cette somme est évidemment différente non seulement de la somme *simple*, mais de la somme *triangulaire* prise à partir de D, qui donnerait $4A + 3B + 2C + 1D$.

Pascal applique alors ce genre de sommes aux nombres : que chaque lettre soit supposée représenter un nombre, par exemple $A = 4$, $B = 1$, $C = 0$ et $D = 5$. La *somme triangulaire* prise à partir de A sera égale à 26, et la somme triangulaire prise à partir de D est égale à 24.

On ne comprend vraiment le sens de cette construction que lorsque, après l'avoir appliquée aux nombres, Pascal fait un pas de plus, et imagine que les grandeurs additionnées sont des poids suspendus à un bras de balance à intervalles égaux. Si à une balance BAC suspendue en A sont disposés à intervalles égaux ces poids de part et d'autre, la balance est en équilibre lorsque la somme triangulaire des poids de chaque bras, prise à partir de A, est égale. Dans le cas présent :

$$(1 \times 4) + (2 \times 0) + (7 \times 3) = 4 + 0 + 21 = 25 = (1 \times 9) + (2 \times 16)^{36}$$

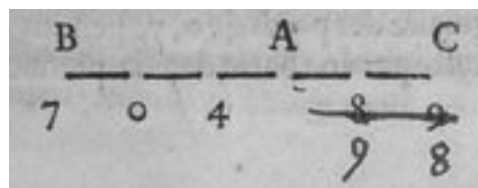


Figure 35

La raison en est que la somme triangulaire des poids a une signification mécanique : comme les divisions de la balance sont supposées égales entre elles, chaque coefficient représente le degré d'éloignement du poids correspondant par rapport au

³⁵ Pascal a si bien conscience de choquer en cela la mentalité commune des géomètres qu'il prend la précaution d'indiquer brièvement comment on peut parvenir aux résultats cherchés sans engendrer des corps géométriques aussi étranges.

³⁶ L'erreur d'impression sur les nombres du bras AC se trouve sur tous les exemplaires imprimés originaux connus ; elle est généralement corrigée à la main.

centre de la balance ; et comme plus un poids est éloigné du point de suspension de la balance, plus il exerce de force, le premier poids doit exercer une force qui doit être comptée une fois, le second poids deux fois, le troisième trois fois, et ainsi de suite. Si bien que la somme triangulaire représente la force globale exercée par tous les poids du bras auquel ils sont pendus, autrement dit elle représente le *moment statique* global de ces poids.

Mais cette étape n'est encore qu'une transition vers un autre ordre de réalité : après être passé des nombres à la statique, Pascal revient à la géométrie, en imaginant que non seulement on peut considérer une droite comme une balance abstraite, mais que les lignes, droites ou courbes, qui s'y rattachent, peuvent être considérées comme des poids qui y seraient suspendus. On imagine par exemple que la ligne BA de la figure 1 de Dettonville est une balance à laquelle sont pendus des poids BF, HG, KI et AC. Cette symbolisation permet à Pascal de traiter les problèmes de centres de gravité qu'il a mis au concours anonymement.

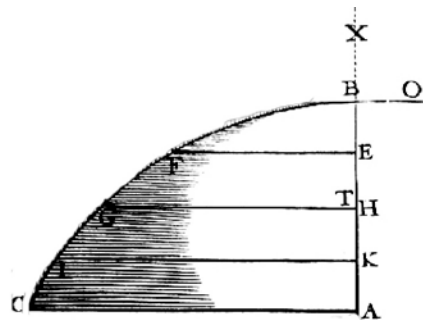


Figure 36

Admettons que AB soit un bras de balance suspendu du côté de A, et que l'on cherche à représenter la force que les ordonnées exercent à proportion de leur éloignement du point A. On devra, conformément à la règle de composition d'une somme triangulaire, compter une seule fois la première ordonnée, deux fois la seconde, trois fois la troisième et ainsi de suite.

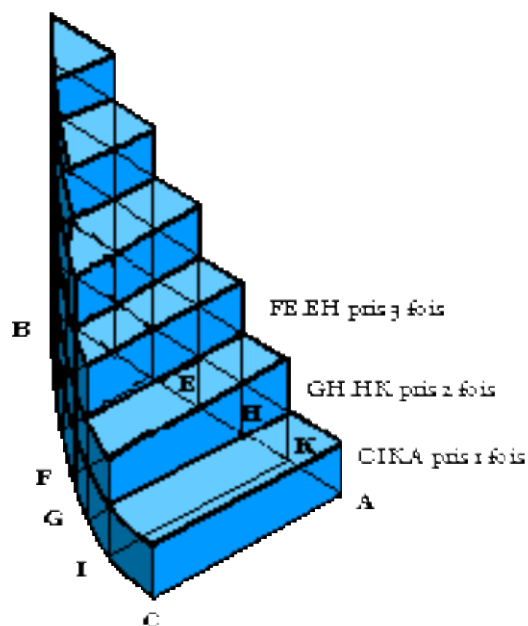


Figure 37

Le nombre de fois dont les portions du triligne sont prises peut être représenté par des segments verticaux valant chacun l'unité, formant ainsi des parallélépipèdes superposés : la portion CIKA prise une fois a une hauteur égale à l'unité, la portion KIGH prise deux fois est un solide dont la hauteur est de deux portions, et ainsi des autres. Pascal se garde bien de présenter cette construction sur les planches des *Lettres de A. Dettonville*, il laisse le lecteur l'imaginer lui-même. Admettons à présent que les portions AK, KH, HE de la balance AB diminuent indéfiniment. Le solide s'identifiera au bout du compte à l'onglet du triligne sur AC (voir la figure 31), qui n'est autre que la *somme triangulaire* de ses ordonnées à l'axe AB.

Là encore, aucune figure de Dettonville ne montre ce solide au lecteur. Il n'y a là rien d'étonnant : Pascal ne tient pas à ce que le lecteur se laisse aller à n'accorder à cette construction qu'une seule signification.

Car il suffit de revenir à la figure initiale de la *somme triangulaire* pour s'apercevoir que la même disposition des lettres se prête à une interprétation en termes de *somme simple* : elle montre immédiatement que

$$1A + 2B + 3C + 4D = (ABCD) + (BCD) + (CD) + D$$

Si l'onglet peut être considéré comme somme *triangulaire* des portions de sa base, il est aussi possible de le regarder comme la somme *simple* des portions parallèles BAC, BKI, BHG, BEF de l'onglet. La distinction qui existe entre sommes *simples* et sommes *triangulaires* n'est pas infranchissable : le solide peut être regardé à volonté comme l'une ou l'autre somme.

Or on tire des conséquences différentes selon que l'on envisage le solide comme somme simple ou somme triangulaire, et la transition de l'un à l'autre permet souvent de progresser dans la résolution des problèmes : « si on ne sait pas tourner les propositions à tous sens, et qu'on ne se serve que du premier biais qu'on a envisagé, on n'ira jamais bien loin : ce sont ces diverses routes qui ouvrent les conséquences nouvelles, et qui, par des énonciations assorties au sujet, lient des propositions qui semblaient n'avoir aucun rapport dans les termes où elles étaient conçues d'abord³⁷. »

Bien plus : l'usage actif des figures que Pascal impose à son lecteur peut aller jusqu'à remettre en question la nature même de l'objet géométrique.

Soit un double onglet sur AC construit sur le triligne BAC. On peut considérer que ce solide est la somme *simple* des triangles rectangles élevés perpendiculairement à AC, dotés chacun d'une épaisseur très fine EE, dont la somme a donc trois dimensions³⁸.

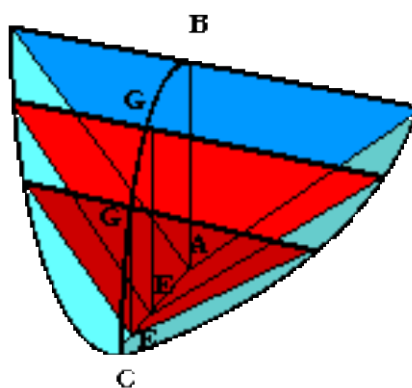


Figure 38

³⁷ OC II, p. 1329.

³⁸ Cette construction fait l'objet de la Proposition V du *Traité des trilignes*, OC IV, p. 446-448.

Admettons à présent que l'on cherche à se représenter ce que serait le moment statique de ces triangles posés sur la balance AC par rapport à A, c'est-à-dire à évaluer leur somme triangulaire. On devra compter le triangle le plus proche de AB une fois, le second deux fois, et ainsi de suite. Mais comme pour figurer la somme triangulaire de ces triangles tridimensionnels, il faut leur ajouter une dimension, on engendre des corps à quatre dimensions, à la grande irritation du P. Lalouvière, qui considère qu'on manque là aux règles de la géométrie pure. Naturellement, on peut réduire le nombre des dimensions du corps en question en matérialisant par un segment plus ou moins long le nombre de fois dont chaque triangle est pris ; mais il est clair qu'une telle construction est entièrement inutile pour l'intelligence du problème.

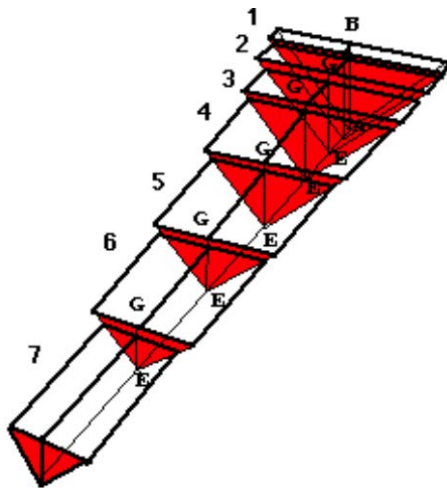


Figure 39

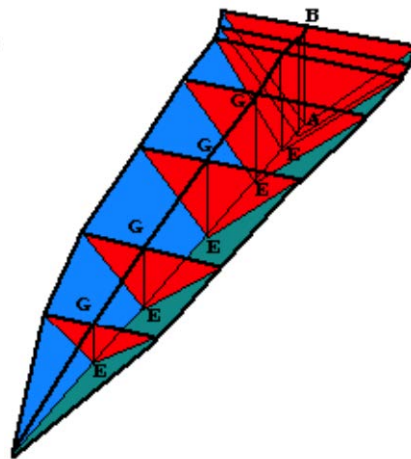


Figure 40

Mais ce qui est remarquable ici, c'est qu'alors contrairement à tous les cas précédents, où la division présuppose l'existence préalable du solide divisé, dans le cas présent c'est la division qui précède et engendre le solide. Il ne s'agit plus de décomposer un corps donné d'avance comme l'onglet en éléments constitutifs qui l'épuiseraient dans la division indéfinie : c'est l'opération de sommation triangulaire d'indivisibles qui engendre des solides qui n'ont aucune existence géométrique préalable. Ce ne sont donc pas seulement les trois dimensions de la géométrie naturelle qui sont mis en cause, c'est la conception même de la géométrie comme travail sur des figures données d'avance. La géométrie n'a plus seulement affaire à des figures dont elle cherche à connaître les propriétés : c'est elle-même qui engendre désormais des corps suivant des règles qu'elle établit selon ses propres exigences.

Il n'est pas surprenant dans ces conditions que les figures acquièrent parfois une sorte de vie secrète qui n'est perceptible qu'au prix d'une extrême attention aux textes. C'est le cas, par exemple, de la célèbre figure du *Traité des sinus du quart de cercle*, qui a inspiré à Leibniz l'idée du *triangle caractéristique*, fondement de son calcul intégral³⁹.

³⁹ OC IV, p. 478.

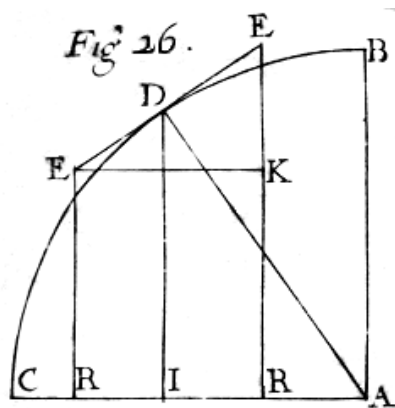


Figure 41

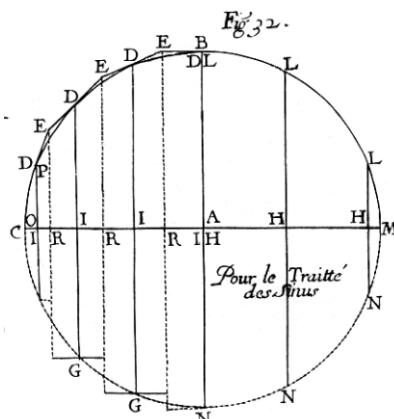


Figure 42

Comme on le sait, cette figure 26 permet à Pascal de montrer une relation apparemment toute simple, qui résulte de la similitude des triangles EKE et DIA.

$$\frac{AD}{DI} = \frac{EE}{EK} = \frac{EE}{RR}$$

Et comme le rayon AD est égal au rayon AB :

$$DI \cdot EE = RR \cdot AB$$

Cette relation a pour intérêt de mettre en correspondance une grandeur fixe, celle du triangle DIA, et une autre qui tende à diminuer au-delà de toute donnée lorsque les deux points E se rapprochent tous deux de D. Pascal applique cette propriété dans les propositions qui suivent immédiatement le *Lemme* initial, notamment sur la figure 32 : elle lui permet de former la somme des sinus DI, c'est-à-dire, comme on l'a vu plus haut, de mesurer la surface courbe engendrée par les sinus du quart de cercle.

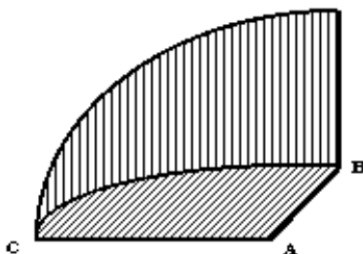


Figure 43

On dit souvent que lorsqu'il a démontré cette relation, Pascal a eu un voile devant les yeux, car il paraît avoir ignoré ce que Leibniz, lui, a compris : que ce *triangle caractéristique* pouvait être adapté à d'autres courbes que le cercle, et en tirer d'abondantes conséquences. En réalité, cette figure si simple a une histoire qui remonte à l'antiquité. Dans sa *Collection mathématique* où il considère non le quart de cercle, mais le demi-cercle entier AHB, Pappus donne la plus ancienne démonstration de cette relation⁴⁰ :

$$AB \cdot DF = (CD + EF) \cdot CE$$

⁴⁰ Pappus d'Alexandrie, *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones, a Federico Commandino urbinatè in latinum conversae et commentariis illustratae*, Pisauri, apud H. Concordiam, 1588 ; Proposition XXI, Lemme II, éd. Ver Eecke, t. 1, p. 280. Voir Dominique Descotes, « Aux origines du triangle caractéristique », dans *L'Ane*, n° 54-55, 1993, p. 43-45.

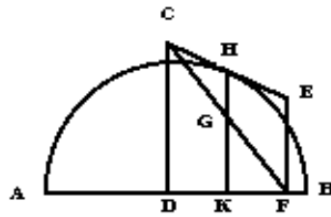


Figure 44

Le P. Lalouvière a retrouvé cette démonstration par la lecture de l'*Opus geometricum* de Grégoire de Saint Vincent, qui renvoie à Pappus : « Circulum ABC contingat EBG ; demittanturque ex punctis E, B, G, perpendiculares ad diametrum AC, quae sint EF, BK, GH ; & BK producatur in D. Dico rectangulum BDEG rectangulo ACFH aequale esse⁴¹. »

$$GB \cdot BD = AC \cdot KH$$

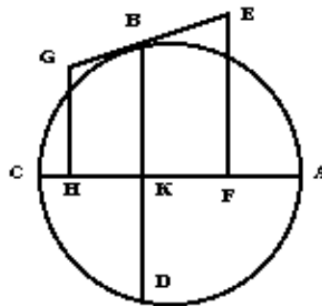


Figure 45

Pascal reprend donc une figure d'une haute antiquité. Mais il la réduit à sa forme la plus féconde, celle du quart de cercle, et il place le lemme en tête de son *Traité des sinus* pour en marquer l'importance. Il ne revendique pas d'être le premier à proposer cette égalité, mais on se trouve bien dans le cas où ce n'est pas la première énonciation qui fait l'auteur, mais bien les conséquences que l'on sait en tirer⁴².

Mais il n'est pas exact de dire que Pascal n'a pas su faire usage de ce triangle. Il faut se reporter à la *Lettre à Huygens* pour s'apercevoir qu'il a parfaitement compris que la correspondance entre une figure de dimension assignable avec une figure destinée à diminuer au-delà de toute grandeur donnée ouvre des perspectives nouvelles. Dans cet opuscule, qui vise à donner la mesure de la cycloïde, Pascal envisage la roulette CBBA, à laquelle il inscrit des segments BB soutenus aux arcs correspondants, tels que, lorsque les portions BB deviennent très petites, la ligne brisée qu'elles constituent ne diffère plus de la courbe que d'une grandeur moindre que toute donnée. Il construit ensuite, à partir du point H, extérieur au demi-cercle CMMF, des lignes HM, dont il montre qu'elles sont toujours proportionnelles aux segments BB, en vertu du fait que les triangles HMG et BOB sont respectivement toujours semblables entre eux, ce qui établit, comme dans le *Traité des sinus*, un rapport entre des triangles de dimension assignable avec des triangles qui deviennent infiniment petits.

⁴¹ Grégoire de Saint-Vincent, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conii decem libris comprehensum*, Livre IX, Proposition XXXVII, J. et J. Meursios, Antverpiae, 1647, p. 985-986.

⁴² *De l'esprit géométrique*, II, *De l'art de persuader*, § 22-25, OC III, p. 423-425.

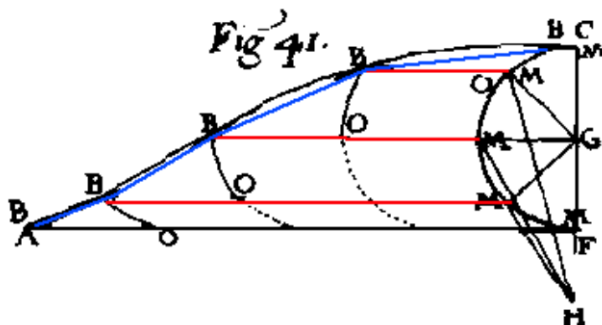


Figure 46

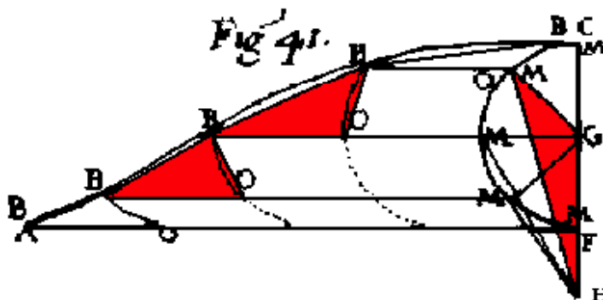


Figure 47

Il suffira alors à Pascal de déplacer le problème de la somme des segments BB, qui compose la ligne cycloïdale, à la somme des HM, qui, lorsqu'on les redresse perpendiculairement au demi-cercle CMF, engendre dans les indivisibles une surface, pour parvenir, au bout de quelques calculs audacieux, à en tirer la dimension de la roulette.

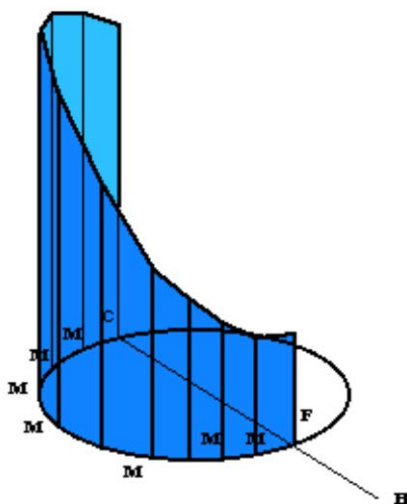


Figure 48

Pascal laisse à l'imagination du lecteur la construction de cette surface courbe. Il a tout intérêt à le faire. Car cette *somme de droites HM*, qui est en fait la somme de ces HM multipliées chacune par une portion d'arc MM, c'est-à-dire, dans le style des indivisibles, des surfaces très fines ($HM \cdot MM$), engendre une surface que l'on doit imaginer élevée verticalement sur le cercle de la figure. Or Pascal a préalablement démontré que la somme des segments BB inscrits à la roulette (autrement dit la courbe de la roulette elle-même) est à la somme des arcs MM (autrement dit à la demi

circonférence CMF) dans le même rapport que la somme des *représentantes* (HM . MM) à la circonférence CMF multipliée par le rayon : ce qui aboutit à l'égalité « la courbe multipliée par le rayon est égale à la somme des représentantes HM (multipliées chacune par les petits arcs MM) », c'est-à-dire :

$$GM \cdot CBBA = \sum (HM \cdot MM) \qquad CBBA = \frac{\sum (HM \cdot MM)}{GM}$$

De sorte que, le rayon GM étant supposé connu, on connaît la courbe de la roulette lorsqu'on peut mesurer la somme des représentantes : « si la somme des HM est donnée, la courbe le sera aussi⁴³ ».

L'opération qui consiste à « diviser » la surface $\sum (HM \cdot MM)$ par le rayon GM n'est pas vraiment intuitive : concrètement, elle signifie que l'on ôte à une surface une de ses dimensions, ce qui la réduit à une ligne simple, comme c'est le cas par exemple lorsque d'un rectangle de surface (AB . BC), on ôte le côté BC pour avoir la mesure de l'autre côté AB. Cette opération, par elle-même très ordinaire, qui consiste en la diminution du nombre de dimensions d'un corps géométrique par « division », reçoit par exemple chez Viète le nom d'*application*⁴⁴.

Ce n'est donc pas seulement en eux-mêmes que ce lemme et sa figure enferment des secrets ; c'est aussi par les perspectives qu'elles ouvrent, dont Pascal ne dit mot. Car si dans le cas du *Traité des sinus*, la construction de ces triangles semblables EKE et DIA conduit à une quadrature, c'est-à-dire à la mesure d'une surface courbe, elle mène dans la *Lettre à Huygens* à la mesure d'une ligne : en d'autres termes, elle effectue les deux opérations inverses que Leibniz assigne au célèbre *triangle caractéristique* dont il a trouvé l'idée dans Dettonville. Mais comme Pascal ne donne toujours que le strict nécessaire dans ses démonstrations, il laisse à son lecteur le soin d'apercevoir la correspondance entre le *Traité des sinus* et la *Lettre à Huygens*, et d'en tirer les conséquences.

Il en résulte que les planches et les figures comptent parmi les données qui peuvent nous renseigner sur l'histoire cachée des ouvrages auxquels elles appartiennent. Kokiti Hara a établi que les figures des planches des *Lettres de A. Dettonville* ont eu une histoire complexe, que leur numérotation dévoile partiellement. J'ai moi-même pu établir que la première planche, où les sept premières figures sont disposées sans ordre cohérent, a connu un état primitif, dans lequel la numérotation des figures est entièrement régulière.

⁴³ OC IV, p. 525.

⁴⁴ Viète, *Isagoge in artem analyticam*, chapitre III. *De lege homogeneorum et gradibus ac generibus magnitudinum comparatarum*, trad. de Vauléard, *Introduction en l'art analytique, ou nouvelle algèbre*, ch. III, Paris, Jacquin, 1630, p. 24. « Tout ainsi que par la multiplication des grandeurs le produit obtient un genre supérieur au genre des multiplicateurs, de même par l'application, qui est le contraire de la multiplication, le genre de la grandeur engendrée de l'application devient inférieur au genre de la grandeur appliquée. »

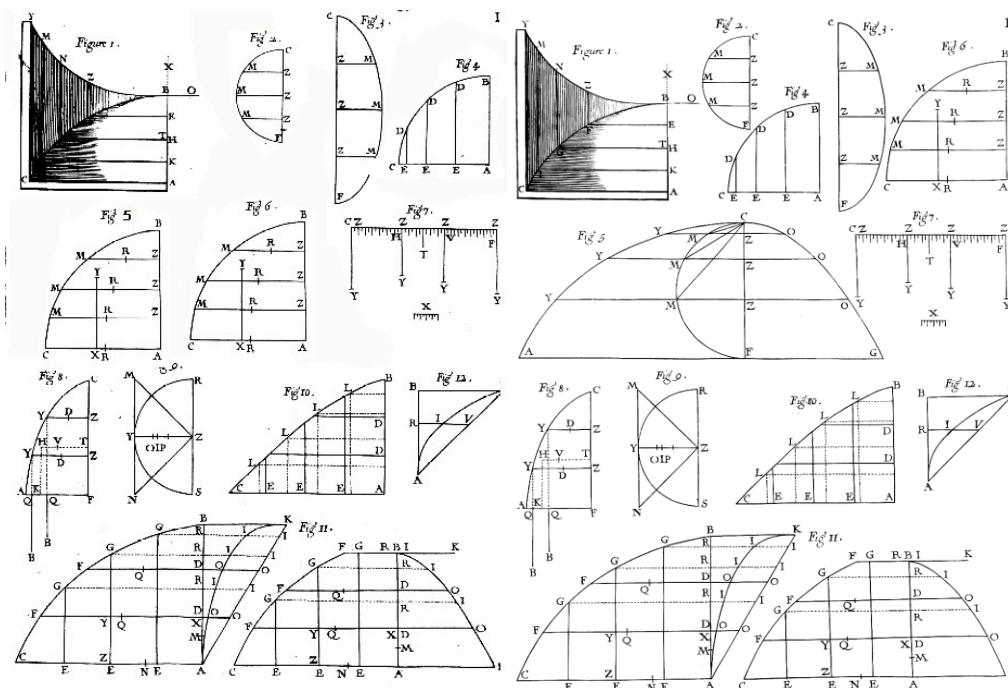


Figure 49. État primitif disparu

Figure 50. État définitif

Cette irrégularité est due à l'introduction tardive d'un corollaire de la *Lettre à Carcavy*⁴⁵ dans un texte déjà imprimé, qui imposait l'insertion d'une figure 5 de dimension supérieure à celle de la planche initiale : comme le montrent les figures ci-dessus, l'opération visait à remplacer le cas trivial du quart de cercle par celui, beaucoup plus nouveau et intéressant, d'un arc de cycloïde. Mais la dimension de la nouvelle figure 5 a provoqué le rejet de la figure 6 dans la première rangée, qui a entraîné une nouvelle répartition des quatre premières figures. Le texte imprimé en a aussi subi l'effet, puisque, le corollaire en question étant plus long que l'original, l'imprimeur a dû resserrer la typographie des pages 13 à 15 de l'imprimé, au point de lui faire perdre son élégance ordinaire. Or ce détail d'apparence purement matérielle est significatif : car dans sa version initiale, le Corollaire en question, qui portait sur le quart de cercle, ne demandait aucune connaissance vraiment difficile. En revanche, la nouvelle rédaction exigeait la mesure de la longueur de l'arc de cycloïde, que Pascal avait longtemps cherchée en vain, et qu'il n'a connue que par l'anglais Wren. Si bien que l'irrégularité des figures de la planche nous renseigne sur les difficultés qu'il a rencontrées dans sa recherche et la rédaction de son traité⁴⁶.

Ce qui frappe dans l'ensemble de ce corpus figuratif, c'est sa combinaison d'audace et de sobriété. L'habitude de Pascal de se tenir strictement au nécessaire, dans le texte comme dans les illustrations, lui est commune avec Nonancourt, dont l'*Euclides logisticus* est vide de figures, et avec Arnauld, dont les *Nouveaux éléments de géométrie* ne sacrifient pas au baroque iconographique. Cette austérité fait un fort contraste avec les planches admirables de certains traités de mathématiques publiés par des jésuites comme le P. Tacquet, pour ne citer que lui, qui traduisent un évident désir de plaire au regard.

⁴⁵ OC IV, p. 428-429.

⁴⁶ Pascal ne mentionne pas le nom de Wren, parce qu'il a signalé nettement sa priorité et lui a publiquement rendu hommage dans l'*Histoire de la roulette* : voir OC IV, p. 221.

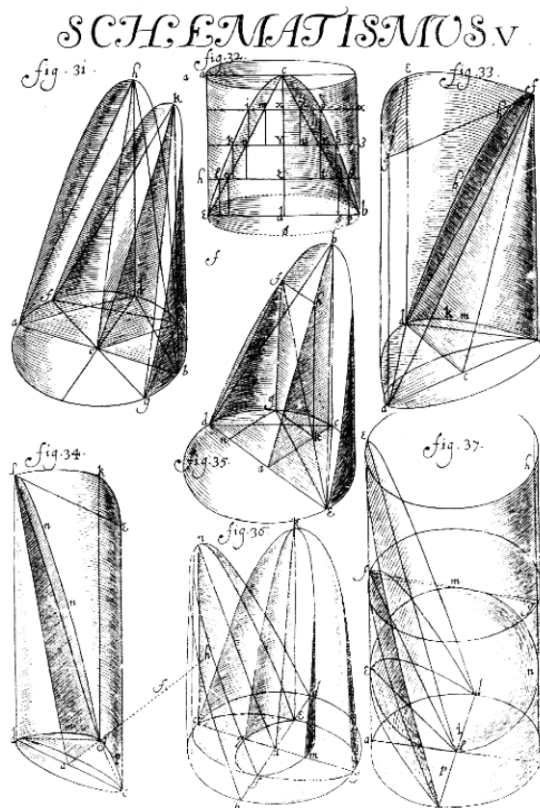


Figure 51

L'idéal de Pascal selon lequel « il faut de l'agréable et du réel, mais il faut que cet agréable soit lui-même pris du vrai⁴⁷ » n'est pas moins présent dans les écrits mathématiques que dans les ouvrages de morale ou d'apologétique. C'est toujours le refus du divertissement pour conduire à l'essentiel qui inspire les auteurs de Port-Royal.

On ne saurait conclure sans souligner l'énormité du contresens qui consiste à attribuer à Pascal une hostilité sans nuance à l'égard de l'imagination. Que dans les *Pensées*, il en dénonce la fourberie, soit. Mais Gérard Ferreyrolles a entièrement raison lorsqu'il ajoute que cette condamnation ne l'empêche pas de faire un remarquable usage de l'imagination rationnelle, dont il sait fort bien qu'elle est beaucoup plus puissante que la *folle du logis*. Car si la fantaisie est capable de faire paraître grand ce qui est petit et *vice versa*, les figures des traités de mathématiques témoignent du fait que l'imagination est capable de produire des merveilles plus étonnantes et plus vertigineuses.

⁴⁷ *Pensées*, Laf. 667, Sel. 547.